Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 19 settembre 2011

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-2x^2)\cos 2x + \ln(2-e^x)}{(\cos x - e^x)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2-1)\operatorname{sen}^2 x + 4(e^{-x}-1)\cos x + 4\operatorname{sen} x \cos^2 x}{(1-e^{-2x})^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^x - x^2}{3x + (1+x)^x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 3}{\sqrt{\log(1+x^2)} - 2x}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{x^4 - 6x^2 - 3}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** il segno di $f(x)$, i limiti sulla frontiera del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale (osservare che $f'(x)$ è un quadrato perfetto); **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi (sfruttare il fatto che $f'(x)$ è un quadrato perfetto); **(e)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)} \quad \frac{x^2+2x-1}{3x^2-4x+1}\,, \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,, \qquad \text{(c)} \quad e^x(\operatorname{sen} x - 2\cos x)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

5. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2-(k-2)^2}{2^k} = \frac{n^2}{2^n}$.

Punti: 3+4+3+3, 2+3+3+3+1, 4+2+4, 7, 7.