Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta dell'11 luglio 2011

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+e^x)\log(x+e^x)+(x-1)\operatorname{sen} x\cos x}{(x-1)^3(1-\sqrt{1+x})^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-x^2)^3 x e^x - 17x + 8xe^{-x}\cos x + 2\operatorname{sen}(x/2)}{\log(1+\operatorname{sen}^3 x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{x^4+2x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3+3x-1}{x-1}} - \sqrt{x^2+2x}\right)$

2. Data la funzione $f(x) := x^3 + 6x - \dfrac{9x}{x^2-1}$, si studino **(a)** il dominio di definizione, le eventuali simmetrie e il segno di $f(x)$; **(b)** i limiti sulla frontiera del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, mostrando che si annulla in esattamente tre punti; **(e)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{3x^3+2x^2+2}{3x^2+x-2}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{\cos x - 2\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x + \cos 2x + 1}\,,\qquad \text{(c)}\quad (\operatorname{sen} x - e^x)\cos x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2\cdot\sqrt{2x+1}}$, ad esempio con la sostituzione $y = x/(x+1)$.

5. Partiamo dalla successione di Fibonacci $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Costruiamo la successione delle somme a segni alterni $b_0 = a_0$, $b_1 = a_0 - a_1$, $b_2 = a_0 - a_1 + a_2$, $b_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$, $b_n = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Dimostrare che la successione b_n verifica la relazione ricorsiva $b_{n+3} = 2b_{n+1} - b_n$ per ogni $n \geq 0$.

Punti: 3+4+2+2, 2+2+2+3+1, 4+2+4, 7, 7.