Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 16 giugno 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x^2+x)} - 3\sqrt{\cos(x-x^2)}}{(2+2\cos x)\operatorname{sen}(e^{-x}-e^{x})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{(2x^3-x^2+2)(2e^x-2)^2 \operatorname{sen} 3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}\tan x + \log\bigl(1+\sqrt{1-\cos x}\bigr)}{\cos(\operatorname{sen} x) - \sqrt{2x^2-x+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{18(1-x)^{4/3} + 16x + 7(x-2)\operatorname{sen} 2x + 18e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\bigl(\log(1+x)+\log(1+2x)\bigr)(\cos 2x - 1)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-\operatorname{sen} x} - (e^x-3x)\operatorname{sen} x}{\bigl(1-\sqrt{1+x^2}\bigr)(1-\operatorname{sen} 3x)}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n-1)!(2n^2-1)}{n^n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2-x} - e^{2x+2}}{\operatorname{sen} x \cos x - \tan x}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = -2x + \log\left|\dfrac{x+1}{1-x}\right|$, trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie, ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Si studi la monotonia e l'eventuale limite della successione ricorsiva $a_{n+1} = (a_n^2 + a_n + 2)/(1+a_n)$, supponendo il dato iniziale a_0 non negativo.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{4x^3-1}{4x^2+8x+5}$, (b) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{\log^2(1+2x)}\log(1+2x)}{1+2x}$, (d) $(e^x-2x)\cos x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\bigl(x-1+\sqrt{x(x-1)}\bigr)}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = 1 - 1/x$, seguita da $z = \sqrt{y}$.

Punti: 2+4+2+4+3+3+2, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 16 giugno 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)^2+12(\cos x)\log(\cos x)-9\tan x}{(1-e^{2x})^2(2x^3+3x-1)\operatorname{sen} 2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\bigl(1+\sqrt{1-\cos 2x}\bigr)+e^x\tan 2x}{\sqrt{3x^2-2x+1}-\cos(\operatorname{sen} x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x^2+x)}-2\sqrt{\cos(2x^2+x)}}{(2-2\cos x)\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{9(x+1)^{4/3}-10(x-3)\operatorname{sen} 2x-9e^x(\cos x-2\operatorname{sen} x)-81x}{\bigl(\log(1-x)+\log(1+2x)\bigr)(1-\cos 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-\operatorname{sen} x}+(3x-e^{-2x})\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)\bigl(1-\sqrt{2x^2+1}\bigr)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1}-e^{4x+1}}{\operatorname{sen} x\cos x-\tan x}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n-1)!(2n^2+1)}{n^n}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-x^2-2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=2x+\log\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|$, trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie, ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Si studi la monotonia e l'eventuale limite della successione ricorsiva $a_{n+1}=(a_n^2+a_n+2)/(1+a_n)$, supponendo il dato iniziale a_0 non negativo.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{4x^3-3x}{4x^2+8x+5}$, (b) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-5\tan^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{\log^2(1+3x)}\log(1+3x)}{1+3x}$, (d) $(e^x-x)\cos 2x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\bigl(x+1+\sqrt{x(x+1)}\bigr)}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=1+1/x$, seguita da $z=\sqrt{y}$.

Punti: 4+2+2+4+3+2+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 16 giugno 2011

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+1)^2-\tan x+8(\cos x)\log(\cos x)}{(x^3-2x^2+1)(2-2e^x)^2\operatorname{sen}3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(x-x^2)}-3\sqrt{\cos(x^2+x)}}{(1+\cos 2x)\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sqrt{1-\cos(x/2)})+e^{-2x}\tan x}{\sqrt{2x^2-4x+1}-\cos(\operatorname{sen}x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{106x+72(1-x)^{4/3}-13(2x-1)\operatorname{sen}2x-36e^x(2\cos x-\operatorname{sen}x)}{\big(\log(1+2x)-\log(1+x)\big)(\cos 2x-1)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4xe^{\operatorname{sen}x}+(x-2e^x)\operatorname{sen}2x}{(1+\operatorname{sen}^2x)\big(1-\sqrt{1-2x^2}\big)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-2}-e^{3x-2}}{\operatorname{sen}x\cos x-\tan x}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n-1)!(3n^2-1)}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=-2x+\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$, trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie, ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Si studi la monotonia e l'eventuale limite della successione ricorsiva $a_{n+1}=(a_n^2+a_n+2)/(1+a_n)$, supponendo il dato iniziale a_0 non negativo.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{4x^3+3x}{4x^2+8x+5}$, (b) $\dfrac{1+\tan^2x}{\sqrt{1-(\tan^2x)/3}}$, (c) $\dfrac{e^{\log^2(1-2x)}\log(1-2x)}{1-2x}$, (d) $(e^{-x}-x)\operatorname{sen}x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{1}{x\big(x+1-\sqrt{x(x+1)}\big)}\,dx$, per esempio col cambio $y=1+1/x$, seguito da $z=\sqrt{y}$.

Punti: 4+2+2+4+3+2+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 16 giugno 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x(1-3x)^2 + 12(\cos x)\log(\cos x)}{(x+3x^3-2)(e^{2x}-1)^2\operatorname{sen} 2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(x-x^2)} - 3\sqrt{\cos(2x-x^2)}}{(x-\cos x)\operatorname{sen}(e^x-e^{-x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\tan 2x + \log\big(1+\sqrt{1-\cos x}\big)}{\cos(\operatorname{sen} x) - \sqrt{x^2-3x+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{9(x+1)^{4/3} - 10(x-2)\operatorname{sen} 2x - 9(2\operatorname{sen} x + \cos x)e^{-x} - 43x}{\big(\log(1-2x)+\log(1+x)\big)(1-\cos 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3xe^{-\operatorname{sen} x} + (x-3e^x)\operatorname{sen} x}{\big(1-\sqrt{1+2x^2}\big)(1-\operatorname{sen} 2x)}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n-1)!(3n^2+1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2-x}-e^{x+2}}{\operatorname{sen} x\cos x - \tan x}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-x^2-2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = 2x + \log\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie, ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Si studi la monotonia e l'eventuale limite della successione ricorsiva $a_{n+1} = (a_n^2 + a_n + 2)/(1+a_n)$, supponendo il dato iniziale a_0 non negativo.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{4x^3+5x}{4x^2+8x+5}$, (b) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-(\tan^2 x)/5}}$, (c) $\dfrac{e^{-\log^2(1-x)}\log(1-x)}{1-x}$, (d) $(e^x-x)\operatorname{sen} 2x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\big(1-x+\sqrt{x(x-1)}\big)}\,dx$, per esempio col cambio $y = 1-1/x$, seguito da $z=\sqrt{y}$.

Punti: 4+2+2+4+3+3+2, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 16 giugno 2011

Svolgimento

1. a. Nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x^2+x)} - 3\sqrt{\cos(x-x^2)}}{(2+2\cos x)\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)}.$$

il numeratore tende a $\sqrt{1}-3\sqrt{1}=-2$, mentre il denominatore tende a $(2+2)\operatorname{sen}0=0$. Quindi il limite è $\pm\infty$, con segno da determinare, forse distinguendo $x\to 0^\pm$. Cerchiamo di portarci a una forma più maneggevole per lo studio del segno . Il fattore $2+2\cos x$ tende a $2+2=4$, per cui possiamo semplificare il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{\cos(x^2+x)} - 3\sqrt{\cos(x-x^2)}}{2+2\cos x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)} &= \frac{-2}{4}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)} = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)}.\end{aligned}$$

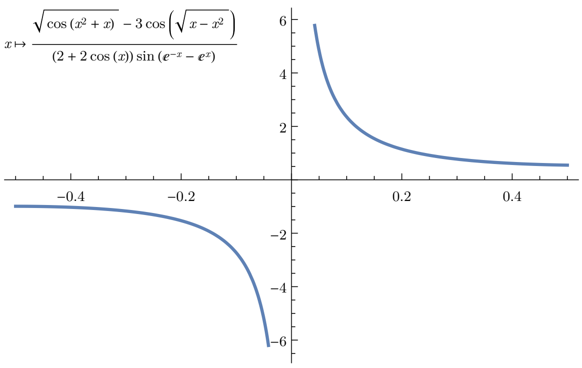
L'argomento del seno, cioè $e^{-x}-e^x$, tende a zero. Questo suggerisce di usare il limite notevole $(\operatorname{sen}t)/t\to 1$ per $t\to 0$ e il teorema del limite del prodotto di funzioni:

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(e^{-x}-e^x)}{e^{-x}-e^x}}\cdot\frac{1}{e^{-x}-e^x} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{e^{-x}-e^x}.$$

L'ultimo limite è ancora della forma $1/0$, però il segno è più abbordabile. Per esempio $e^{-x}-e^x>0 \iff e^{-x}>e^x \iff -x>x \iff x<0$. Altrimenti aggiungiamo e togliamo 1 al denominatore per riportarci al limite notevole $(e^t-1)/t\to 1$ per $t\to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^\pm} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{e^{-x}-1-(e^x-1)} &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\frac{e^{-x}-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{-\frac{e^{-x}-1}{-x}-\frac{e^x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{-1-1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x} = \begin{cases}+\infty & \text{per } x\to 0^+\\ -\infty & \text{per } x\to 0^-.\end{cases}\end{aligned}$$

Strettamente parlando il limite per $x\to 0$ non esiste.



b. Nel limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2+\tan x}{(2x^3-x^2+2)(2e^x-2)^2\operatorname{sen}3x}$$

il numeratore tende a $8(\cos 0)\log(\cos 0) - x(1-0)^2+\tan 0 = 0$, e pure il denominatore tende a 0. Si tratta quindi di una forma indeterminata $0/0$. Una prima semplificazione si può fare se si nota che il fattore $2x^3-x^2+2$ al denominatore tende a 2, per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2+\tan x}{(2x^3-x^2+2)(2e^x-2)^2\operatorname{sen}3x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2+\tan x}{(2e^x-2)^2\operatorname{sen}3x}.$$

Inoltre il fattore $\sin 3x$ al denominatore suggerisce di sfruttare il limite notevole $(\sin t)/t \to 1$ per $t \to 0$:

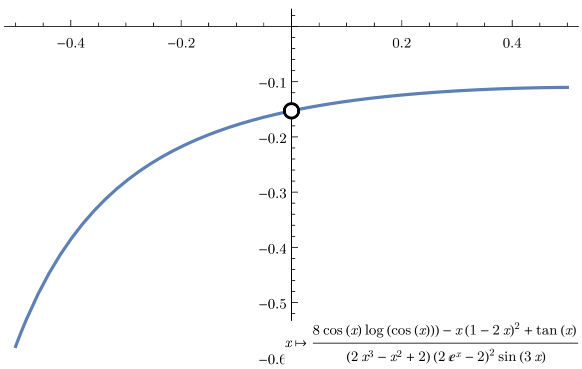
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{(2e^x-2)^2 \operatorname{sen} 3x} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{(2e^x-2)^2 3x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\cdot 1 \lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{3x(2e^x-2)^2}.
\end{aligned}$$

Il fattore $2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$ suggerisce di sfruttare il limite notevole $(e^t - 1)/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{3x\cdot 2^2(e^x-1)^2} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{3x\cdot 2^2 x^2}\cdot\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{12x^3} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{24x^3}.
\end{aligned}$$

Non intravvediamo fattorizzazioni al numeratore. Applichiamo l'Hôpital più volte:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{8(\cos x)\log(\cos x) - x(1-2x)^2 + \tan x}{24x^3} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8(-\operatorname{sen} x)\log(\cos x) + 8(\cos x)\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) - (1-2x)^2 - x\cdot 2(1-2x)(-2) + 1 + \tan^2 x}{72x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-8(\operatorname{sen} x)\log(\cos x) - 8\operatorname{sen} x - (1-2x)^2 + 4x - 8x^2 + 1 + \tan^2 x}{72x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{144x}\Big(-8\cos x\log\cos x - 8\operatorname{sen} x\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) - 8\cos x - \\
&\qquad - 2(1-2x)(-2) + 4 - 16x + 2(\tan x)(1+\tan^2 x)\Big) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos x\log\cos x + 8\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} - 8\cos x - 24x + 8 + 2\tan x + 2\tan^3 x}{144x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{144}\Big(-8(-\operatorname{sen} x)\log(\cos x) - 8(\cos x)\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) + \\
&\qquad + 8\frac{2\operatorname{sen} x\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} + 8\operatorname{sen} x - 24 + (2 + 6\tan^2 x)(1+\tan^2 x)\Big) = \\
&= -\frac{22}{144} = -\frac{11}{72}.
\end{aligned}$$



c. Nel limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\tan x + \log\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}{\cos(\operatorname{sen} x) - \sqrt{2x^2 - x + 1}}$$

sia il numeratore che il denominatore tendono a 0. Non intravvediamo semplificazioni. Applichiamo l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\tan x+\log\bigl(1+\sqrt{1-\cos x}\bigr)}{\cos(\operatorname{sen}x)-\sqrt{2x^2-x+1}}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}\tan x+e^{-2x}(1+\tan^2 x)+\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}\frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}}\operatorname{sen}x}{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\cos x-\frac{1}{2\sqrt{2x^2-x+1}}(4x-1)}$$

Il denominatore non dà problemi perché tende a

$$-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}0)\cos 0-\frac{1}{2\sqrt{2\cdot 0^2-0+1}}(4\cdot 0-1)=0-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Quindi possiamo liberarci del denominatore, mentre al numeratore possiamo applicare la regola del limite della somma e poi del prodotto, isolando un termine rimanente della forma 0/0:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}\tan x+e^{-2x}(1+\tan^2 x)+\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}\frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}}\operatorname{sen}x}{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\cos x-\frac{1}{2\sqrt{2x^2-x+1}}(4x-1)}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}\tan x+e^{-2x}(1+\tan^2 x)+\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}\frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}}\operatorname{sen}x}{1/2}=\\
&=2\lim_{x\to 0}\left(-2e^{-2x}\tan x+e^{-2x}(1+\tan^2 x)+\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}\frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}}\operatorname{sen}x\right)=\\
&=2\left(0+1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}\frac{\operatorname{sen}x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)=\\
&=2+\frac{1}{1+\sqrt{1-1}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\cos x}}=\\
&=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\cos x}}.
\end{aligned}$$

Cerchiamo di riportarci al limite notevole $(1-\cos t)/t^2\to 1/2$ moltiplicando e dividendo per x^2 dentro la radice:

$$2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\cos x}}=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x^2\frac{1-\cos x}{x^2}}}.$$

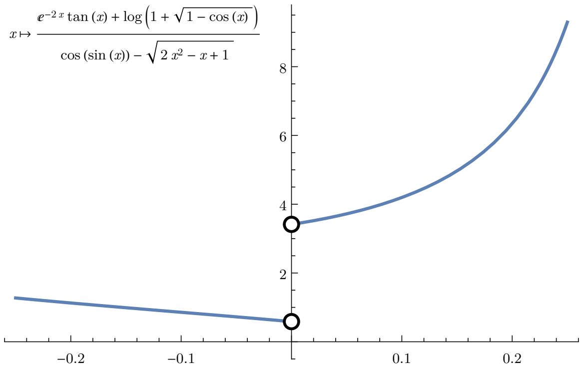
Entrambi i fattori x^2 e $\frac{1-\cos x}{x^2}$ sono positivi, per cui la radice del prodotto è uguale al prodotto delle radici:

$$\begin{aligned}
2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x^2\frac{1-\cos x}{x^2}}}&=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=\\
&=2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1/2}}=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}.
\end{aligned}$$

Distinguiamo il caso $x\to 0^+$ e $x\to 0^-$:

$$\begin{aligned}
2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}&=2+\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=2+\sqrt{2}\cdot 1=2+\sqrt{2},\\
2-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{|x|}&=2+\sqrt{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{-x}=2+\sqrt{2}\cdot(-1)=2-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

I limiti da destra e da sinistra sono diversi. Quindi il limite di partenza non esiste.



d. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{\big(\log(1+x)+\log(1+2x)\big)(\cos 2x-1)}$$

è della forma $0/0$. Al denominatore possiamo semplificare riportandoci al limite notevole $(1-\cos t)/t^2 \to 1/2$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{\big(\log(1+x)+\log(1+2x)\big)\left(-\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}(2x)^2\right)}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^2\big(\log(1+x)+\log(1+2x)\big)}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}=\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^2\big(\log(1+x)+\log(1+2x)\big)}
\end{aligned}$$

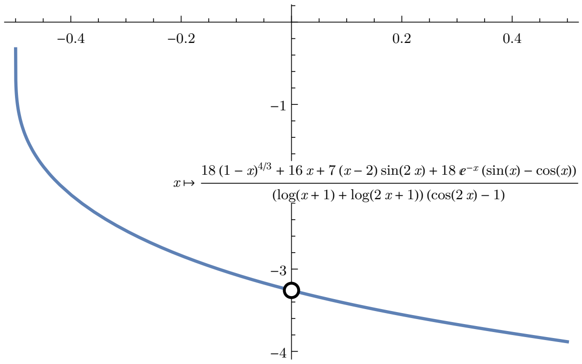
Un'ulteriore semplificazione al denominatore si ottiene riportandosi al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$:

$$\begin{aligned}
&2\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^2\big(\log(1+x)+\log(1+2x)\big)}=\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^2\left(x\frac{\log(1+x)}{x}+2x\frac{\log(1+2x)}{2x}\right)}=\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^2\cdot x}\cdot\frac{1}{\frac{\log(1+x)}{x}+2\frac{\log(1+2x)}{2x}}=\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{-4x^3}\cdot\frac{1}{1+2\cdot 1}=\\
&=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Non intravvedendo ulteriori semplificazioni applichiamo l'Hôpital più volte:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{18(1-x)^{4/3}+16x+7(x-2)\operatorname{sen}2x+18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\Big(18\frac{4}{3}(1-x)^{1/3}(-1)+16+7\operatorname{sen}2x+7(x-2)2\cos 2x-\\
&\qquad -18e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)+18e^{-x}(\cos x+\operatorname{sen}x)\Big)=\\
&=-\frac{1}{18}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(-24(1-x)^{1/3}+16+7\operatorname{sen}2x+14(x-2)\cos 2x+\\
&\qquad +18e^{-x}(-\operatorname{sen}x+\cos x+\cos x+\operatorname{sen}x)\Big)=\\
&=-\frac{1}{18}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(-24(1-x)^{1/3}+16+7\operatorname{sen}2x+14(x-2)\cos 2x+\\
&\qquad +36e^{-x}\cos x\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{18}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big(-24\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(-1)+14\cos 2x+14\cos 2x+14(x-2)(-2\operatorname{sen}2x)+\\
&\qquad\qquad +36e^{-x}(-1)\cos x+36e^{-x}(-\operatorname{sen}x)\Big)=\\
&= -\frac{1}{36}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(8(1-x)^{-2/3}+28\cos 2x-28(x-2)\operatorname{sen}2x+\\
&\qquad\qquad +36e^{-x}(-\cos x-\operatorname{sen}x)\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&= -\frac{1}{36}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}\Big(8\Big(-\frac{2}{3}\Big)(1-x)^{-5/3}(-1)-56\operatorname{sen}2x-28\operatorname{sen}2x-28(x-2)2\cos 2x+\\
&\qquad\qquad +36e^{-x}(-1)(-\cos x-\operatorname{sen}x)+36e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big)=\\
&= -\frac{1}{36}\lim_{x\to 0}\Big(\frac{16}{3}-0-0-28(-2)2+\\
&\qquad\qquad +36(-1)(-1-0)+36(0-1)\Big)=\\
&= -\frac{1}{36}\Big(-\frac{352}{3}\Big)=-\frac{88}{27}.
\end{aligned}
$$



e. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{\big(1-\sqrt{1+x^2}\big)(1-\operatorname{sen}3x)}$$

si presenta nella forma $0/0$. Al denominatore il fattore $1-\operatorname{sen}3x$ tende a 1, per cui si può semplificare:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{\big(1-\sqrt{1+x^2}\big)(1-\operatorname{sen}3x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{1-\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{sen}3x}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{1-\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{1-\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

La radice al denominatore si può eliminare moltiplicando e dividendo per $1+\sqrt{1+x^2}$, che tende a 1:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{1-\sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{\big(1-\sqrt{1+x^2}\big)\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)}\cdot\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{1-(1+x^2)}\cdot\big(1+\sqrt{1+0^2}\big)=\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{-x^2}=\\
&= -2\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Non intravvedendo ulteriori semplificazioni, applichiamo l'Hôpital più volte:

$$-2\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-\operatorname{sen}x}-(e^x-3x)\operatorname{sen}x}{x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} x} + xe^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x) - (e^x - 3)\operatorname{sen} x - (e^x - 3x)\cos x}{2x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

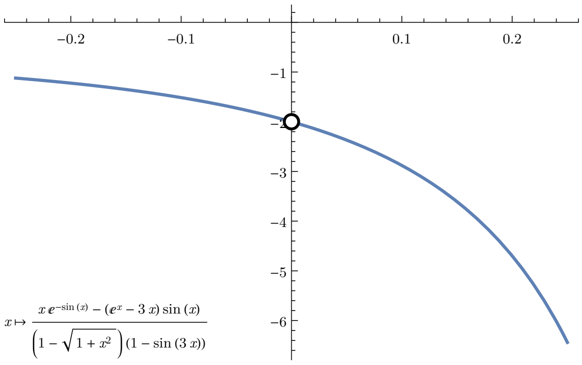
$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\Big(e^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x) + e^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x) + xe^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x)(-\cos x) + xe^{-\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x -$$

$$- e^x \operatorname{sen} x - (e^x - 3)\cos x - (e^x - 3)\cos x - (e^x - 3x)(-\operatorname{sen} x)\Big) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\Big(-1 - 1 + 0 + 0 -$$

$$- 0 - (1-3) - (1-3) - 0\Big) =$$

$$= -2.$$



f. Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!(2n^2-1)}{n^n}$$

si presenta nella forma ∞/∞. Il fattore $2n^2 - 1$ si può semplificare, e poi si può associare un fattore n al fattoriale $(n-1)!$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!(2n^2-1)}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!n^2}{n^n} \cdot \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!n^2}{n^n} \cdot 2 =$$

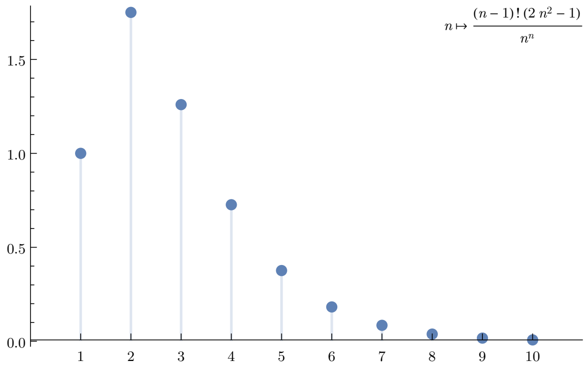
$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot n}{n^n} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot n}{n^n}.$$

Espandiamo numeratore e denominatore e maggioriamo:

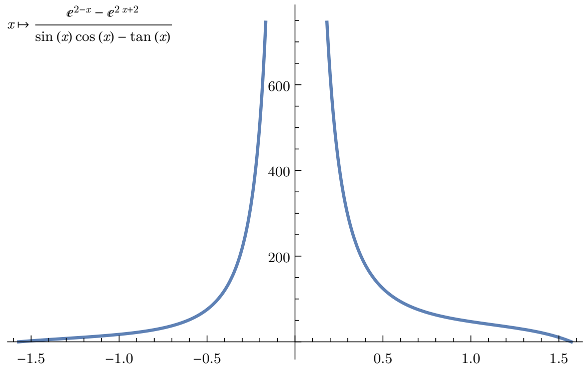
$$0 < \frac{n! \cdot n}{n^n} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}^{n \text{ fattori}} \cdot n}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n \text{ fattori}}} = \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{3}{n}}_{\text{tutti } \le 1} \cdot \overbrace{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}^{>0} \cdot n \le$$

$$\le 1 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

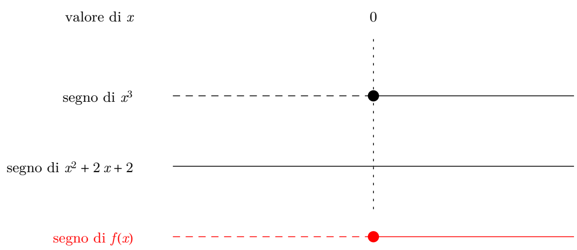
Poiché il primo e l'ultimo membro tendono entrambi a 0 per $n \to +\infty$, per il teorema del confronto anche $n! \cdot n/n^n$ tende a 0. Il limite di partenza pertanto è pure 0.



g. Il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2-x} - e^{2x+2}}{\operatorname{sen} x \cos x - \tan x}$$
si presenta nella forma $0/0$. Proviamo ad applicare l'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2-x} - e^{2x+2}}{\operatorname{sen} x \cos x - \tan x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{2-x} - 2e^{2x+2}}{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - 1 - \tan^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^{2-x} - 2e^{2x+2}}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \tan^2 x}.$$
L'ultimo limite è della forma $-3e^2/0$, che non è indeterminato, e vale $\pm\infty$. Per capire il segno proviamo a trasformare il denominatore con le identità $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e $\tan x = (\operatorname{sen} x)/\cos x$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{2-x} - 2e^{2x+2}}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3e^2}{1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \tan^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3e^2}{-2\operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3e^2}{-2\operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}^2 x)/\cos^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3e^2}{(\operatorname{sen}^2 x)\underbrace{(-2 - 1/\cos^2 x)}_{\to -3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-3e^2}{(\operatorname{sen}^2 x)(-3)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$
Nell'ultima versione il limite si presenta nella forma $e^2/0^+$. Quindi il limite iniziale vale $+\infty$.



2. a. La funzione
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 2}$$
è definita dove il denominatore non si annulla. Poiché il determinante del denominatore è $\Delta/4 = 1 - 2 = -1 < 0$, il denominatore non si annulla mai, e quindi f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poiché il denominatore è addirittura sempre > 0, il segno di $f(x)$ coincide col segno del numeratore, cioè
$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$
Nello schema di studio del segno seguente le linee continue significano segno > 0, le linee tratteggiate segno < 0, i pallini pieni sono degli zeri.



b. La frontiera del dominio è costituita da $+\infty$ e da $-\infty$, e i passaggi sono gli stessi nei due casi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cdots = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

c. Asintoti verticali od orizzontali non ce ne sono. Proviamo con gli obliqui:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{x^3}{x^2+2x+2} - x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x^3-2x^2-2x}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2} = -2.$$

Quindi il grafico della f è asintotico alla retta $y = x-2$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$. E' di qualche interesse capire come si posiziona il grafico di f rispetto all'asintoto. Per questo studiamo il segno di $f(x) - (mx+q)$:

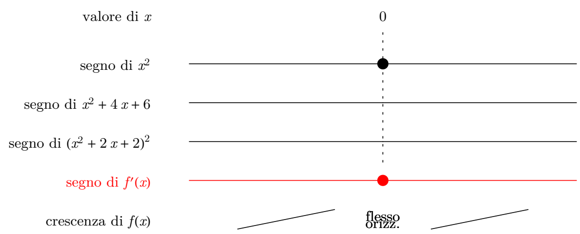
$$f(x) - (mx+q) = f(x) - x + 2 = \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2} + 2 = \frac{-2x^2-2x+2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} = \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}.$$

Quindi la funzione attraversa l'asintoto per $x=-2$, sta sopra l'asintoto per $x > -2$ e sotto per $x < -2$.

d. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2x+2) - x^3(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{3x^4+6x^3+6x^2-2x^4-2x^3}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{x^4+4x^3+6x^2}{(x^2+2x+2)^2} =$$
$$= \frac{x^2(x^2+4x+6)}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Il discriminante di x^2+4x+6 è $\Delta/4 = 2^2-6 = -2 < 0$, per cui il fattore x^2+4x+6 è sempre > 0. Il fattore x^2 si annulla per $x=0$ ed è > 0 altrove. Il denominatore è sempre > 0. Quindi la derivata $f'(x)$ si annulla per $x=0$ ed è > 0 altrove. La funzione f pertanto è (strettamente) crescente su tutto $\mathbb{R}$. Nell'origine la retta tangente è orizzontale e il grafico la attraversa: si tratta di un punto di flesso orizzontale.



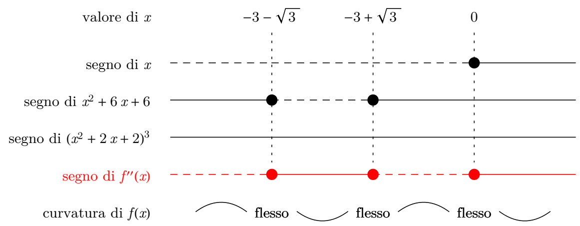
e. Nel calcolo della derivata seconda bisogna ricordarsi di semplificare il fattore comune (x^2+2x+2) al numeratore e al denominatore:

$$f''(x) = \frac{(4x^3+12x^2+12x)(x^2+2x+2)^2 - x^2(x^2+4x+6)\cdot 2(x^2+2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4} =$$
$$= \frac{4x(x^2+3x+3)(x^2+2x+2) - 4x^2(x^2+4x+6)\cdot(x+1)}{(x^2+2x+2)^3} =$$
$$= 4x\frac{x^4+2x^3+2x^2+3x^3+6x^2+6x+3x^2+6x+6 - x(x^3+x^2+4x^2+4x+6x+6)}{(x^2+2x+2)^3} =$$

$$= 4x\frac{x^4+5x^3+11x^2+12x+6-x^4-5x^3-10x^2-6x}{(x^2+2x+2)^3} =$$

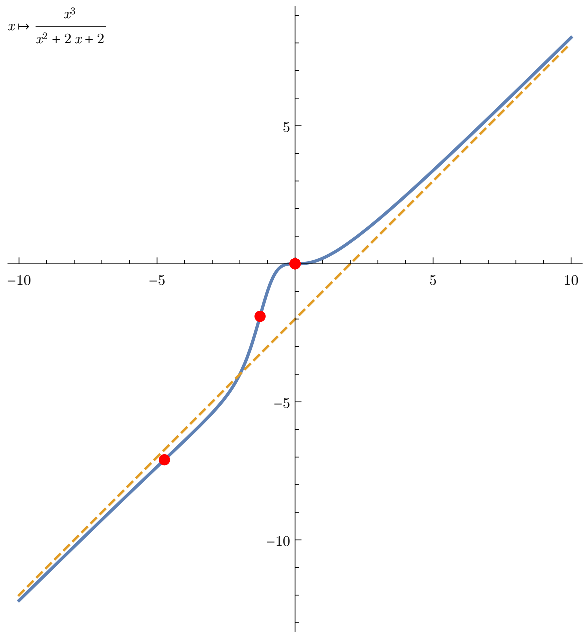
$$= 4x\frac{x^2+6x+6}{(x^2+2x+2)^3}.$$

Il polinomio x^2+6x+6 ha discriminante $\Delta/4 = 3^2-6 = 3$, e quindi si annulla per $x = -3 \pm \sqrt{3}$.



Nei tre punti di ascissa $-3-\sqrt{3} < -3+\sqrt{3} < 0$ la derivata seconda cambia segno, per cui questi sono punti di flesso.

f. Il grafico di f ha questo aspetto:



3.a. La funzione

$$g(x) = -2x + \log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

è definita dove il denominatore $1-x$ è diverso da 0 e contemporaneamente l'argomento del logaritmo è > 0:

$$\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \left|\dfrac{x+1}{1-x}\right| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \dfrac{x+1}{1-x} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Quindi il dominio di g è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Per le eventuali simmetrie proviamo a confrontare $f(-x)$ con $f(x)$, usando l'identità notevole $\log(a/b) = -\log(b/a)$:

$$g(-x) = -2(-x) + \log\left|\frac{(-x)+1}{1-(-x)}\right| = 2x + \log\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 2x + \log\frac{|1-x|}{|1+x|} =$$

$$= 2x + \log\frac{|1+x|}{|1-x|} = 2x - \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\left(-2x + \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = g(x).$$

Quindi la funzione g è dispari, e il grafico è simmetrico rispetto all'origine.
I punti estremi del dominio di g sono $\pm\infty, \pm 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2x + \log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) = -\infty + \log|-1| = -\infty + 0 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x+\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) = +\infty+\log|-1| = +\infty+0 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1}\left(-2x+\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) = 2+\log|0^{\pm}| = 2-\infty = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}\left(-2x+\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) = 2+\log|\pm\infty| = 2+\infty = +\infty.$$

b. Asintoti orizzontali non ce ne sono. Asintoti verticali sono le due rette $x=\pm1$. Proviamo con gli obliqui:

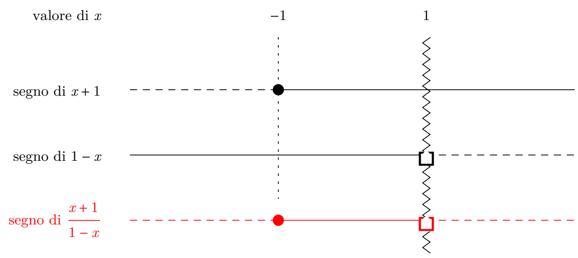
$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(-2x+\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-2+\frac{1}{x}\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right) =$$
$$= -2+0\cdot\log|-1| = -2,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\big(g(x)-mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-2x+\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right|-(-2)x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\log\left|\frac{x+1}{1-x}\right| =$$
$$= \log|-1| = 0.$$

Quindi la retta $y=-2x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Tralasciamo la verifica che g si trova sopra l'asintoto a destra dell'asse y e sotto l'asintoto a sinistra.

c. Per calcolare la derivata di g aiuta ricordare che la derivata di $\log|h(x)|$ è $h'(x)/h(x)$ sia quando $h(x)<0$ che quando $h(x)>0$:

$$g'(x) = -2+\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(x+1)(-1)}{(1-x)^2} = -2+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{1-x} =$$
$$= \frac{-2(1+x)(1-x)+2}{(x+1)(1-x)} = \frac{-2(1-x^2)+2}{(x+1)(1-x)} = \frac{2x^2}{(x+1)(1-x)} = \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

Alternativamente si può prima togliere il valore assoluto distinguendo a seconda che $\frac{x+1}{1-x}$ sia positivo o negativo. Nello schema di studio del segno seguente i quadratini vuoti e la linea a zigzag stanno per uno zero al denominatore.



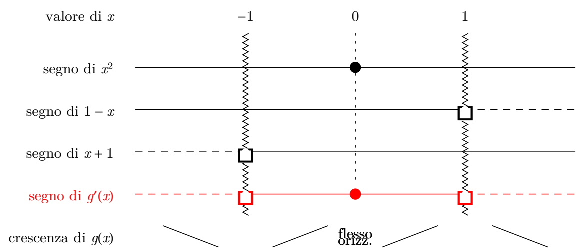
Quindi

$$g(x) = \begin{cases} -2x+\log\dfrac{x+1}{1-x} & \text{se } -1<x<1,\\[2ex] -2x+\log\left(-\dfrac{x+1}{1-x}\right) & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1.\end{cases}$$

Derivando separatamente le formule dei due casi alla fine viene esattamente la stessa formula:

$$g'(x) = \begin{cases} \ldots = \dfrac{2x^2}{(x+1)(1-x)} & \text{se } -1<x<1,\\[2ex] \ldots = \dfrac{2x^2}{(x+1)(1-x)} & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1.\end{cases}$$

Il segno di $g'(x)$ si trova facilmente:

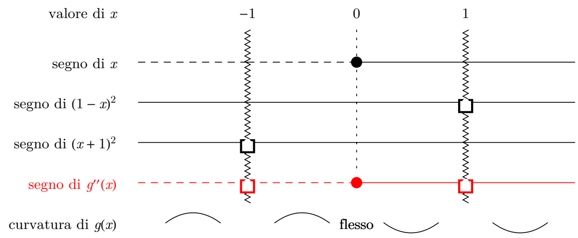


Quindi g è crescente su $]-1,1[$, decrescente su $]-\infty,-1[$ e ancora decrescente su $]1,+\infty[$. La tangente nell'origine è orizzontale, per cui l'origine è un candidato ad essere un punto di flesso.

d. La derivata seconda di g è

$$g''(x) = \frac{4x(1-x^2) - 2x^2(-2x)}{(x+1)^2(1-x)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2(1-x)^2},$$

e il suo segno è presto trovato:



Quindi la g è convessa su $[0,1[$ e su $]1,+\infty[$, ed è concava su $]-\infty,-1[$ e su $]-1,0]$. Come previsto in 0 la derivata seconda cambia segno e c'è un punto di flesso.

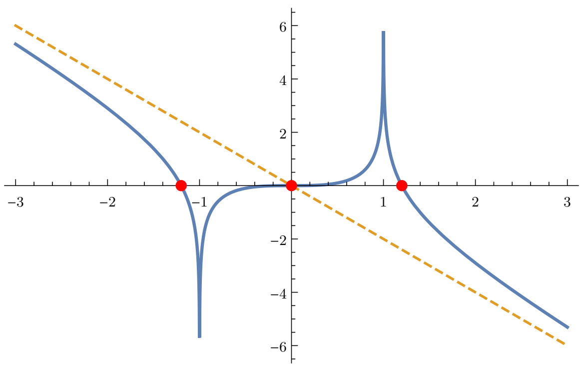
e. La g è continua su $]-\infty,-1[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente decrescente. Un calcolo esplicito elementare di tale zero non sembra fattibile.

La g è continua su $]-1,1[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente crescente. Per la simmetria tale punto non può essere che l'origine: $g(0) = g(-0) = -g(0)$, da cui $g(0) = 0$. Lo si vede anche calcolando

$$g(0) = -2 \cdot 0 + \log\left|\frac{0+1}{1-0}\right| = 0 + \log|1| = 0 + 0 = 0.$$

La g è continua su $]1,+\infty[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente decrescente. Un calcolo esplicito elementare di tale zero non sembra fattibile.

f. Il grafico di f è come segue:



4. Studiare la monotonia della successione a_n equivale a trovare il segno di $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + a_n + 2}{1 + a_n} - a_n = \frac{a_n^2 + a_n + 2 - a_n(1+a_n)}{1+a_n} = \frac{a_n^2 + a_n + 2 - a_n - a_n^2}{1+a_n} = \frac{2}{1+a_n}.$$

Il segno di $a_{n+1} - a_n$ coincide dunque col segno di $1 + a_n$. Per $n = 0$ per ipotesi $a_0 \geq 0$, e quindi $1 + a_n \geq 1 > 0$. Vediamo se per caso la proprietà $1 + a_n > 0$ si trasmette induttivamente:

$$1 + a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2 + a_n + 2}{1+a_n} = 1 + \frac{\overbrace{a_n^2 + 1}^{\geq 1} + \overbrace{a_n + 1}^{>0}}{\underbrace{1 + a_n}_{>0}} \geq 1 + 0 > 0\,.$$

n	a_n
0	0
1	2
2	2.66667
3	3.21212
4	3.68694
5	4.11366
6	4.50477
7	4.86809
8	5.20892
9	5.53103
10	5.83726

È ancora più facile osservare che la proprietà $a_n \geq 0$ si trasmette induttivamente:

$$a_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n + 2}{1 + a_n} = \frac{\overbrace{a_n^2 + 2}^{\geq 2} + \overbrace{a_n}^{\geq 0}}{1 + \underbrace{a_n}_{>0}} \geq 0\,.$$

In entrambi i modi risulta dimostrato per induzione che $1+a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e di conseguenza $a_{n+1} - a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, la successione a_n è strettamente crescente.

Una successione crescente e positiva ha certamente limite, e questo è o un numero $\ell > 0$ oppure è $+\infty$. Vediamo che relazione deve soddisfare ℓ:

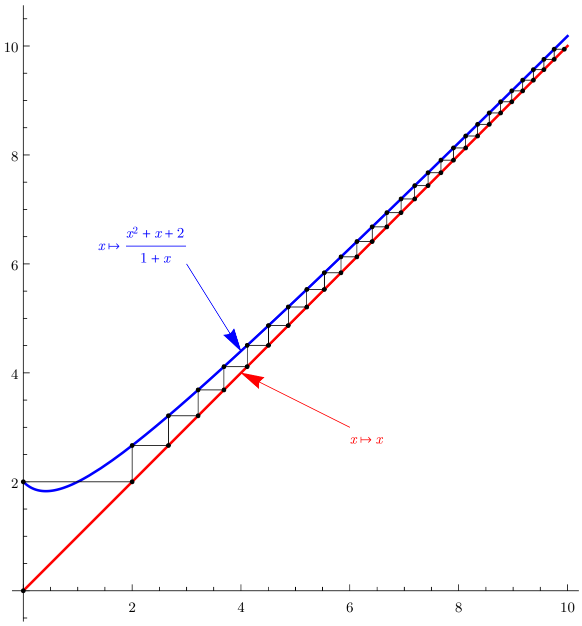
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 + a_n + 2}{1 + a_n} = \frac{\ell^2 + \ell + 2}{1 + \ell},$$

da cui

$$\ell = \frac{\ell^2 + \ell + 2}{1 + \ell} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ell^2 + \ell + 2 - \ell(1+\ell)}{1+\ell} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{1+\ell} = 0\,.$$

Ma una frazione con numeratore 2 non può essere nulla. Dobbiamo quindi escludere che il limite di a_n sia finito. L'unica alternativa residua è che il limite sia $+\infty$.

La successione è l'iterata della funzione $f(x) = (x^2+x+2)/(1+x)$, e quindi si presta a una interpretazione grafica:



5.a. La funzione razionale $(4x^3 - 1)/(4x^2 + 8x + 5)$ ha il numeratore di grado maggiore del denominatore. Facciamo la divisione di polinomi:

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
+4\,x^3 & & & -1 & +4\,x^2 & +8\,x & +5 \\ \cline{5-7}
-4\,x^3 & -8\,x^2 & -5\,x & & & +x & -2 \\ \cline{1-4}
 & -8\,x^2 & -5\,x & -1 & & & \\
 & +8\,x^2 & +16\,x & +10 & & & \\ \cline{1-4}
 & & +11\,x & +9 & & &
\end{array}$$

Quindi abbiamo la decomposizione

$$\frac{4x^3 - 1}{4x^2 + 8x + 5} = x - 2 + \frac{11x + 9}{4x^2 + 8x + 5}.$$

Il denominatore ha determinante $\Delta/4 = 4^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$. La derivata del denominatore è $8x + 8 = 8(x+1)$: facciamola apparire al numeratore:

$$\frac{11x+9}{4x^2+8x+5} = \frac{11}{8} \cdot \frac{8x + \frac{8}{11}9}{4x^2+8x+5} = \frac{11}{8} \cdot \frac{8x + 8 - 8 + \frac{8}{11}9}{4x^2+8x+5} = \frac{11}{8}\left(\frac{8x+8}{4x^2+8x+5} + \frac{-8 + \frac{8}{11}9}{4x^2+8x+5}\right) =$$

$$= \frac{11}{8}\cdot\frac{8x+8}{4x^2+8x+5}+\frac{11}{8}\cdot\frac{-8+\frac{8}{11}9}{4x^2+8x+5}=\frac{11}{8}\cdot\frac{8x+8}{4x^2+8x+5}+\frac{-11+9}{4x^2+8x+5}=$$
$$=\frac{11}{8}\cdot\frac{8x+8}{4x^2+8x+5}-2\frac{1}{4x^2+8x+5}$$

Mettiamo in evidenza un quadrato perfetto: $4x^2+8x+5=4(x^2+2x)+5=4(x^2+2x+1)-4+5=4(x^2+2x+1)+1=4(x+1)^2+1=1+(2x+2)^2$. Riassumendo

$$\frac{4x^3-1}{4x^2+8x+5}=x-2+\frac{11}{8}\cdot\frac{8x+8}{4x^2+8x+5}-2\frac{1}{1+(2x+2)^2}=$$
$$=x-2+\frac{11}{8}\cdot\frac{D(4x^2+8x+5)}{4x^2+8x+5}-\frac{1}{1+(2x+2)^2}D(2x+2).$$

In questa forma gli addendi hanno tutti una primitiva immediata o quasi:

$$\int\frac{4x^3-1}{4x^2+8x+5}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{8}\log|4x^2+8x+5|-\arctan(2x+2).$$

Poiché la funzione di partenza è definita su tutto $\mathbb{R}$, che è un intervallo, ogni altra primitiva si può ottenere aggiungendo una costante.

b. La funzione

$$\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}$$

ha il numeratore che è la derivata della tangente:

$$\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}=\frac{D(\tan x)}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}.$$

Il denominatore ricorda quello della derivata dell'arcoseno, specialmente se portiamo il coefficiente 3 dentro al quadrato:

$$\frac{D(\tan x)}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}=\frac{D(\tan x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}\tan x)^2}}.$$

Dividendo e moltiplicando per $\sqrt{3}$ facciamo in modo che il numeratore sia proprio la derivata dell'oggetto che viene elevato al quadrato:

$$\frac{D(\tan x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}\tan x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{D(\sqrt{3}\tan x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}\tan x)^2}}.$$

Possiamo concludere:

$$\int\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-3\tan^2 x}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}\tan x).$$

c. Nella funzione si può fattorizzare così:

$$\frac{e^{\log^2(1+2x)}\log(1+2x)}{1+2x}=e^{\log^2(1+2x)}\cdot\log(1+2x)\cdot\frac{1}{1+2x}.$$

L'ultimo fattore è la derivata del penultimo, a parte un fattore 2:

$$e^{\log^2(1+2x)}\cdot\log(1+2x)\cdot D\Big(\frac{1}{2}\log(1+2x)\Big)=\frac{1}{2}e^{\log^2(1+2x)}\cdot\log(1+2x)\cdot D\big(\log(1+2x)\big).$$

Rifacendoci allo schema $Dy^2=2yD(y)$ con $y=\log(1+2x)$, possiamo riscrivere così:

$$\frac{1}{2}e^{\log^2(1+2x)}\cdot D\Big(\frac{1}{2}\log^2(1+2x)\Big)=\frac{1}{4}e^{\log^2(1+2x)}\cdot D\big(\log^2(1+2x)\big),$$

Rifacendoci allo schema $De^y=e^yDy$, possia riscrivere così:

$$\frac{1}{4}De^{\log^2(1+2x)}.$$

Quindi una primitiva cercata è $\frac{1}{4}e^{\log^2(1+2x)}$. Volendo si può manipolare la formula:

$$\frac{1}{4}e^{\log^2(1+2x)}=\frac{1}{4}(e^{\log(1+2x)})^{\log(1+2x)}=\frac{1}{4}(1+2x)^{\log(1+2x)}.$$

d. Per calcolare una primitiva di $(e^x-2x)\cos x$ conviene spezzare in somma $e^x\cos x-2x\cos x$, perché i due addendi si trattano in modo un po' diverso. Il primo si fa dapprima per parti due volte:

$$\int e^x\cos x\,dx=\int\cos x\,de^x=e^x\cos x-\int e^x d\cos x=e^x\cos x-\int e^x(-\operatorname{sen}x)dx=$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \cos x + \int \operatorname{sen} x\, de^x = \\
&= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x\, d \operatorname{sen} x = \\
&= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx,
\end{aligned}
$$

e poi si porta l'ultimo integrale a primo membro ottenendo

$$2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x,$$

da cui

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x).$$

L'integrale rimanente si fa pure per parti:

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d \operatorname{sen} x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x - (-\cos x) = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Concludendo

$$\int (e^x - 2x) \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x) - 2(x \operatorname{sen} x + \cos x).$$

5. Nell'integrale

$$\int \frac{1}{x\big(x - 1 + \sqrt{x(x-1)}\big)}\, dx$$

facciamo la sostituzione suggerita $y = 1 - 1/x$. Dapprima bisogna esprimere x in funzione di y:

$$y = 1 - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} = 1 - y \iff x = \frac{1}{1-y}.$$

Il differenziale dx diventa

$$dx = D_y\Big(\frac{1}{1-y}\Big) dy = -\frac{1}{(1-y)^2} \cdot (-1) dy = \frac{1}{(1-y)^2} dy.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\big(x - 1 + \sqrt{x(x-1)}\big)}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{1-y}\big(\frac{1}{1-y} - 1 + \sqrt{\frac{1}{1-y}(\frac{1}{1-y} - 1)}\big)} \cdot \frac{1}{(1-y)^2} dy = \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{1-y} - 1 + \sqrt{\frac{1}{1-y}(\frac{1}{1-y} - 1)}} \cdot \frac{1}{1-y} dy = \\
&= \int \frac{1}{\frac{1-1+y}{1-y} + \sqrt{\frac{1}{1-y} \cdot \frac{1-1+y}{1-y}}} \cdot \frac{1}{1-y} dy = \\
&= \int \frac{1}{\frac{y}{1-y} + \sqrt{\frac{y}{(1-y)^2}}} \cdot \frac{1}{1-y} dy.
\end{aligned}
$$

Deve essere $y > 0$, altrimenti non ha senso la funzione dentro l'integrale. Facciamo prima il caso in cui $1 - y > 0$ e semplifichiamo:

$$\int \frac{1}{\frac{y}{1-y} + \sqrt{\frac{y}{(1-y)^2}}} \cdot \frac{1}{1-y} dy = \int \frac{1}{\frac{y}{1-y} + \frac{1}{1-y}\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{1-y} dy = \int \frac{1}{y + \sqrt{y}} dy.$$

Facciamo una seconda sostituzione $z = \sqrt{y}$. Ricaviamo y in funzione di z:

$$z = \sqrt{y} \iff z^2 = y,$$

da cui $dy = 2z\,dz$. Sostituendo:

$$\int \frac{1}{y+\sqrt{y}}dy = \int \frac{1}{z^2+z} \cdot 2z\,dz = 2\int \frac{1}{z+1}dz = 2\log|z+1| = 2\log|\sqrt{y}+1| =$$
$$= 2\log\bigl(\sqrt{y}+1\bigr) = 2\log\Bigl(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Bigr)$$

(si può togliere il valore assoluto perché $\sqrt{y}+1>0$ dove esiste). Se invece $1-y<0$, cioè $y>1$, viene un conto leggermente diverso:

$$\int \frac{1}{\frac{y}{1-y}+\sqrt{\frac{y}{(1-y)^2}}} \cdot \frac{1}{1-y}dy = \int \frac{1}{\frac{y}{1-y}+\frac{1}{-(1-y)}\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{1-y}dy = \int \frac{1}{y-\sqrt{y}}dy =$$
$$= \int \frac{1}{z^2-z} \cdot 2z\,dz = 2\int \frac{1}{z-1}dz = 2\log|\sqrt{y}-1| =$$
$$= 2\log\bigl(\sqrt{y}-1\bigr) = 2\log\Bigl(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\Bigr).$$

(si può togliere il valore assoluto perché $\sqrt{y}-1>0$ in quanto $y>1$). Vediamo dove sono valide le due formule tradotte in termini di x. La condizione $y>0$ diventa

$$y>0 \iff 1-\frac{1}{x}>0 \iff \frac{x-1}{x}>0 \iff \bigl(x<0 \text{ o } x>1\bigr),$$

che coincide semplicemente con la condizione di esistenza della funzione iniziale $1/(x(x-1+\sqrt{x(x-1)}))$. Invece il segno di $1-y$ coincide col segno di x:

$$1-y = 1-\Bigl(1-\frac{1}{x}\Bigr) = \frac{1}{x}\begin{cases} >0 & \text{se } x>0,\\ <0 & \text{se } x<0.\end{cases}$$

Conclusione:

$$\int \frac{1}{x\bigl(x-1+\sqrt{x(x-1)}\bigr)}\,dx = \begin{cases} 2\log\Bigl(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Bigr) & \text{se } x>1,\\ 2\log\Bigl(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\Bigr) & \text{se } x<0.\end{cases}$$

Si può verificare che la formula che dà la primitiva per $x>1$ non è una primitiva per $x<0$, e viceversa.