Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 4 febbraio 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-3x^2)(x-x^3)-2x^5}{4x^3-3x^5+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^x-\log_2(1+x)}{(2-x^2-x)\big(1-\cos(x-1)\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{2x^4+3x^2+2x}-2\sqrt{x^4-2x^2+4x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\log_3 x)-2\operatorname{sen}(\log_3 x)}{x3^{2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{4^{2x}-2^{2x}-2^{x/2}}-\sqrt{4^{x+1}-x^4+16^x}\Big)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{2\operatorname{sen}^2(x-1)-\cos^2(x-1)+\cos(x-1)}{x(x^2+4x+4)(2x^2-2x)(1-x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{4^x x^6+2^x(3x-1)^3}-(x^3 2^x-\log_2 x)\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-3x^3)(x^2+5x^3-2)}{(4x-x^3)\sqrt{5x^2-x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}\big(2-\sqrt{4-x}\big)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+2\operatorname{sen}^2 x}}{(1-\cos x)\sqrt{x+1}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-2^{2x}x^2+\cos 2x}{x^3+3^{x+1}-2^{-x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-x^4)(x^2-2x+3)}{(3x-x^3)(2x-5)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(2^x x+3)}{\sqrt{x^4+4x^3}-\sqrt{x^4+4}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3^{x+1}(x-1)+\log_2(\cos x)}{(1-2^x)(3x-2x^2)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{7x^2-9x}{2x^2-5x-3} \ge 3x-2x^2$, (b) $\max\{x-1,|2-x|\}-|2-x| \ge x-1$,

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{x}{2-3x}} \ge \frac{1-x}{2-3x}$.

3. Dimostrare per induzione su n che $(1+x)^{n+1/2} \ge 1+\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)x$ quando $x \ge -1$ e $n \ge 1$. (Il passo induttivo da n a $n+1$ si fa come nella disuguaglianza di Bernoulli).

4. Poniamo $X = \{n/(n+2|n|+1) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $1/3$ è un maggiorante e -1 è un minorante. Sono anche massimo e minimo? Estremo superiore e inferiore?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 4 febbraio 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9^x x^4+3^x(2x+1)^2}-(3^x x^2-\log_2 x)\right)$

b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^{2x}+\log_3(4x-1)}{(x^2+x-2)\operatorname{sen}^2(x-1)}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2^{4x}+2^{2x+1}-3^{x/2}}-\sqrt{4^{x-1}-x^3+16^x}\right)$

d) $\lim_{x\to-1}\frac{\cos(x+1)-\cos^2(x+1)-2\sin^2(x+1)}{x(x^2-2x+1)(3x+3x^2)(x+1)}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2x^2)(x-3x^3)-x^5}{2x^2-3x^5-1}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{sen}(\log_2 x)-\cos(\log_2 x)}{x^3 3^x}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^4-x^3-5x^2}-2\sqrt{x^4+3x^2-2x}\right)$

h) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3(2+3^x x)}{\sqrt{x^4-4x^3}-\sqrt{x^4+3}}$

i) $\lim_{x\to0}\frac{4^{x+1}(3x-1)+\log_3(\cos x)}{(1-3^x)(4x-x^2)}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x^3)(x^3-x^2-4)}{(x-3x^3)(3x-4)}$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}x+3^x+1-\cos x}{x^2-3^{x+1}+2^{-x}}$

l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-x^4)(x^2-2x+3)}{(3x-x^3)\sqrt{2x+x^2}}$

m) $\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^2 x}}{2(1-\cos x)\sqrt{x+1}}$

n) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1-x^2}}{\cos x-1}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $2x^2+3x+\frac{7x^2+9x}{2x^2+5x-3}\geq 0$, (b) $\max\{|x+2|,-x-1\}+x+1\geq|x+2|$,

(c) $\sqrt{\frac{-x}{3x+2}}\geq\frac{x+1}{3x+2}$.

3. Dimostrare per induzione su n che $(1+x)^{n-1/2}\geq 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)x$ quando $x\geq-1$ e $n\geq2$. (Il passo induttivo da n a $n+1$ si fa come nella disuguaglianza di Bernoulli).

4. Poniamo $X=\{n/(2|n|+n+1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. Dimostrare che -1 è un minorante e $1/3$ è un maggiorante. Sono anche minimo e massimo? Estremo inferiore e superiore?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 4 febbraio 2011

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\cos(x+1)-\cos^2(x+1)-3\operatorname{sen}^2(x+1)}{x(x^2-2x+1)(x+x^2)(2+2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\log_2 x)-2\cos(\log_2 x)}{x^2 2^x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^{2x}+\log_2(3x-1)}{(2x^2-3x+1)\operatorname{sen}^2(x-1)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4^{2x}-2^{2x+1}+2^{x/2}}-\sqrt{4^x-5x+16^x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^4-5x^3+x^2}-2\sqrt{x^4-2x^2+3x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^2-2x^3)(x^3+2x^2-1)}{(3x-2x^3)(x-8)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9^x x^4+2(x-1)^2 3^x}-(3^x x^2-\log_3 x)\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2^{x+1}(3x-1)+\log_2(\cos x)}{(1-3^x)(2x-5x^2)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x^4)(x^2+5x-2)}{(3x-x^3)\sqrt{x+3x^2}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-2^{2x}x-\cos 2x}{x^3+3^{x-1}-4^{-x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^3 x}}{(1-\cos x)\sqrt{2-x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x+2x^2}}{\cos x-1}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+(2x-x^2)(x-3x^3)}{2x^3-5x^5-1}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(4+2^x x)}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+3}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle 2x^2+\frac{5x^2+2x}{2x^2+3x-2}+x\ge0$, (b) $\max\{x+2,|x+1|\}-|x+1|\ge x+2$,

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{-x-1}{3x+1}}\ge\frac{x}{3x+1}$.

3. Dimostrare per induzione su n che $(1+x)^{n+1/2}\ge 1+\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ quando $x\ge-1$ e $n\ge1$. (Il passo induttivo da n a $n+1$ si fa come nella disuguaglianza di Bernoulli).

4. Poniamo $X=\{n/(n+2|n|+1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $1/3$ è un maggiorante e -1 è un minorante. Sono anche massimo e minimo? Estremo superiore e inferiore?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 4 febbraio 2011

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,\mathrm{sen}(\log_3 x) - \cos(\log_3 x)}{x2^{2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^4+2x^2-3x} - 2\sqrt{x^4-x^3+7x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\cos(x-1)} - x^x - \log_3(1+2x)}{(x^2-3x+2)\big(1-\cos(x-1)\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2^{4x}-2^{2x-1}-3^{x/2}} - \sqrt{4^{x+1}-x^2+16^x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3\,\mathrm{sen}^2(x-1) - \cos^2(x-1) + \cos(x-1)}{x(x^2+2x+1)(2x-2x^2)(1-x)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4^x x^6 + 2^x(2x+3)^3} - (2^x x^3 + \log_2 x)\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x^2-3x^3)(2x^3-x^2-1)}{(x-4x^3)(2x-7)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9^x - 3^{2x}x - \cos x}{2x^2 + 4^{x-1} - 3^{-x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-x^2)(x-4x^3) - x^5}{9x^2 - 2x^5 + 2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-x^3)(x^3-3x^2+1)}{(x-2x^3)\sqrt{x+2x^2}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{2\,\mathrm{sen}^3 x + \mathrm{sen}^2 x}}{(1-\cos x)\sqrt{1-x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_3(4+3^x x)}{\sqrt{x^4-2x^3} - \sqrt{x^4+1}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}}{\mathrm{sen}\big(1-\sqrt{1-x}\big)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^{x+1}(x-3) + \log_3(\cos x)}{(1-2^x)(x-6x^2)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{5x^2-2x}{2x^2-3x-2} \geq x - 2x^2$, (b) $\max\{2-x, |x-1|\} - |x-1| \geq 2-x$,

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{1-x}{3x-1}} \geq \frac{x}{3x-1}$.

3. Dimostrare per induzione su n che $(1+x)^{n-1/2} \geq 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)x$ quando $x \geq -1$ e $n \geq 2$. (Il passo induttivo da n a $n+1$ si fa come nella disuguaglianza di Bernoulli).

4. Poniamo $X = \{n/(2|n|+n+1) \ :\ n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che -1 è un minorante e $1/3$ è un maggiorante. Sono anche minimo e massimo? Estremo inferiore e superiore?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

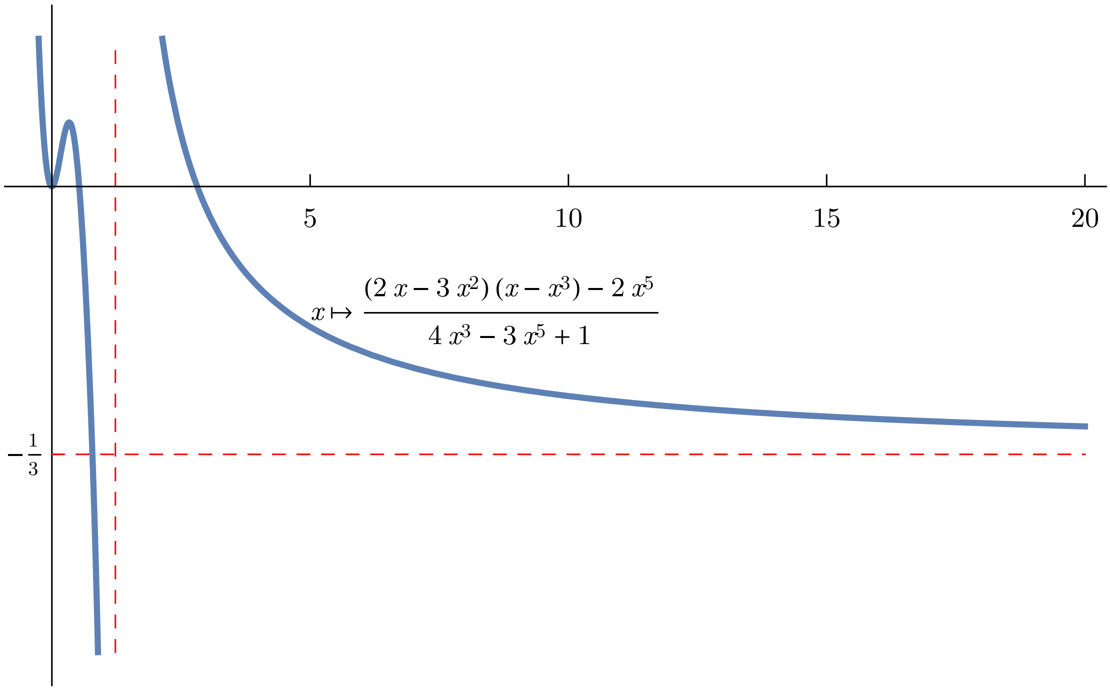
Compitino del 4 febbraio 2011

Svolgimento

Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Raccogliere i termini di grado massimo e poi dividere:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3x^2)(x-x^3)-2x^5}{4x^3-3x^5+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2x^{-1}-3)\cdot x^3(x^{-2}-1)-2x^5}{x^5(4x^{-2}-3+x^{-5})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^{-1}-3)(x^{-2}-1)-2}{4x^{-2}-3+x^{-5}}=\frac{(-3)(-1)-2}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

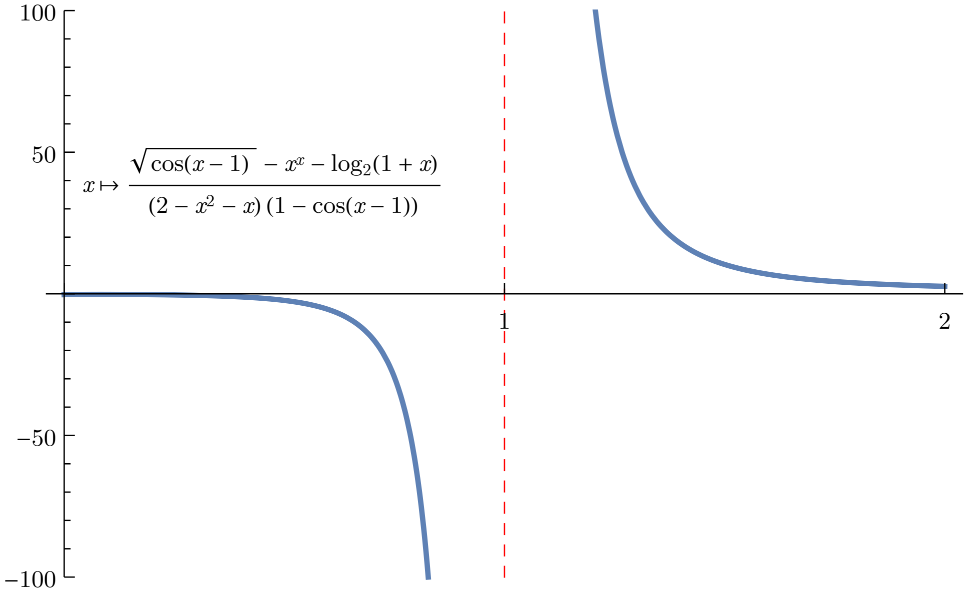


b. Si presenta nella forma $-1/0$, non indeterminata:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^x-\log_2(1+x)}{(2-x^2-x)\big(1-\cos(x-1)\big)}=\frac{\sqrt{1}-1^1-\log_2 2}{(2-1-1)(1-1)}=\frac{-1}{0}=\pm\infty\,.$$

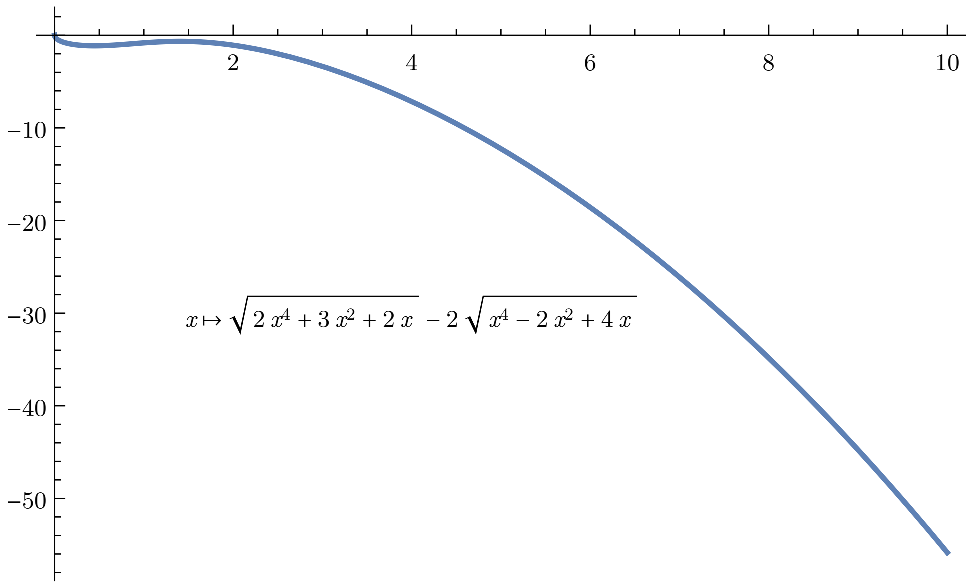
Per decidere il segno dell'infinito si osserva che il numeratore è negativo per $x\to1$, perché tende a -1. Poi il fattore $1-\cos(x-1)$ è positivo perché il coseno è sempre ≤ 1. Il fattore $2-x^2-x$ è un polinomio di secondo grado che si annulla per $x=1$ e per $x=2$, e il coefficiente di x^2 è negativo. Quindi $2-x^2-x$ è negativo per $x\to1^-$ ed è positivo per $x\to1^+$. Mettendo insieme i segni dei tre fattori si ottiene che i limiti da sinistra e da destra sono diversi:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^x-\log_2(1+x)}{(2-x^2-x)\big(1-\cos(x-1)\big)}=-\infty,\qquad\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{\cos(x-1)}-x^x-\log_2(1+x)}{(2-x^2-x)\big(1-\cos(x-1)\big)}=+\infty\,.$$



c. Forma indeterminata $+\infty - \infty$. I termini principali delle due radici non sono identici, per cui conviene raccoglierli:

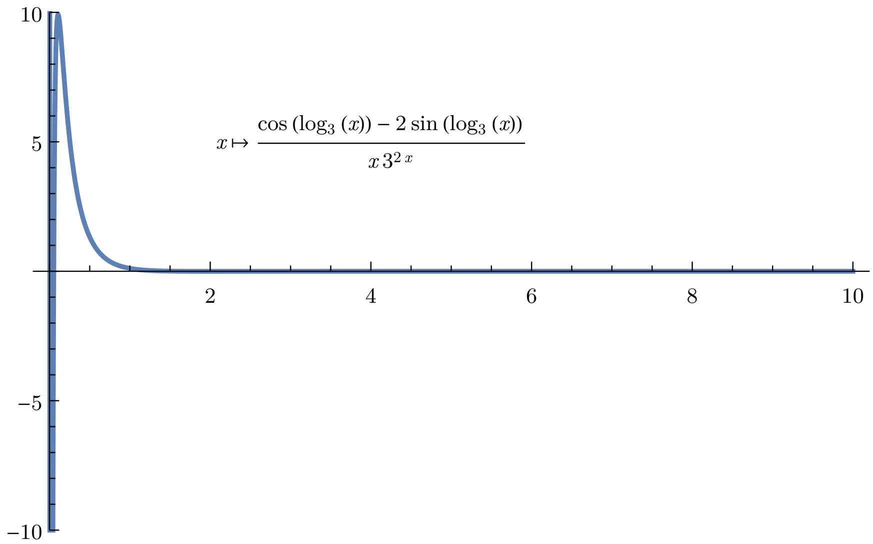
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4+3x^2+2x} - 2\sqrt{x^4-2x^2+4x}\right) = \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4(2+3x^{-2}+2x^{-3})} - 2\sqrt{x^4(1-2x^{-2}+4x^{-3})}\right) = \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\sqrt{2+3x^{-2}+2x^{-3}} - 2\sqrt{1-2x^{-2}+4x^{-3}}\right) = (+\infty)\cdot(\underbrace{\sqrt{2}-2}_{<0}) = -\infty\,.
\end{aligned}$$



d. Si presenta nella forma (funzione limitata)/∞, che fa 0:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(\log_3 x) - 2\,\mathrm{sen}(\log_3 x)}{x3^{2x}} = 0\,.$$

Infatti il coseno e il seno di qualsiasi cosa sono compresi fra -1 e 1, per cui $\cos(\log_3 x) - 2\,\mathrm{sen}(\log_3 x)$ sono sempre compresi fra -3 e 3. Il denominatore è il prodotto di x e di un esponenziale crescente, che tendono entrambi a $+\infty$.

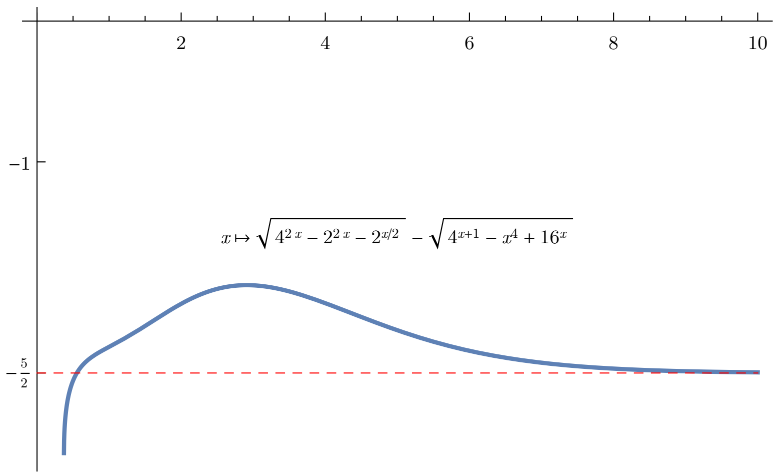


e. Forma indeterminata $+\infty - \infty$. I termini principali nelle due radici sono identici: $4^{2x} = 16^x = 2^{4x}$. Quindi conviene "irrazionalizzare", dato che i termini principali al numeratore si cancellano, mentre al denominatore si sommano:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4^{2x}-2^{2x}-2^{x/2}}-\sqrt{4^{x+1}-x^4+16^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(4^{2x}-2^{2x}-2^{x/2})-(4^{x+1}-x^4+16^x)}{\sqrt{4^{2x}-2^{2x}-2^{x/2}}+\sqrt{4^{x+1}-x^4+16^x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2^{2x}-2^{x/2}-2^{2x+2}+x^4}{\sqrt{2^{4x}(1-2^{-2x}-2^{-7x/2})}+\sqrt{2^{4x}(2^{-2x+2}-x^4 2^{-4x}+1)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}(-1-2^{-3x/2}-2^2+x^4 2^{-2x})}{2^{2x}\left(\sqrt{1-2^{-2x}-2^{-7x/2}}+\sqrt{2^{-2x+2}-x^4 2^{-4x}+1}\right)} = \frac{-1-4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{5}{2}.$$



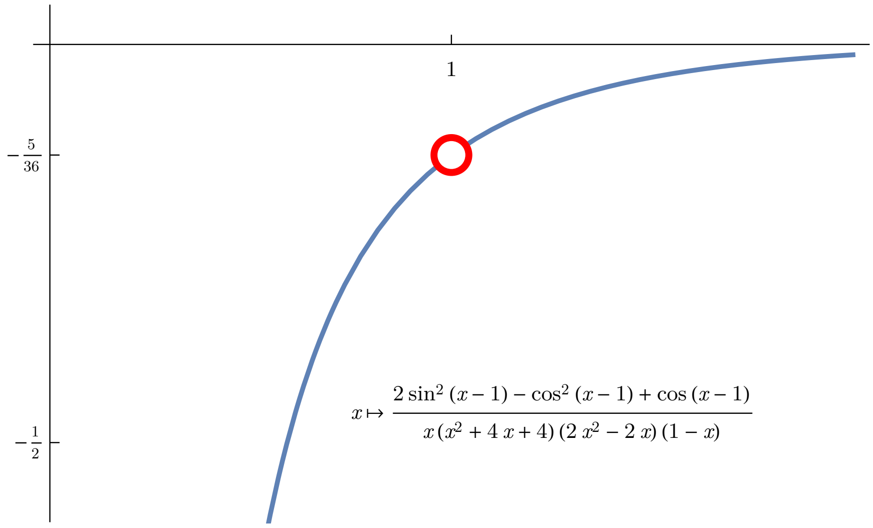
f. Forma indeterminata $0/0$. Alcuni fattori tendono a numeri diversi da 0, e si possono eliminare subito. Poi si può fare il cambio di variabile $t = x-1 \to 0$ per riportarsi a limiti notevoli:

$$\lim_{x\to1}\frac{2\,\mathrm{sen}^2(x-1)-\cos^2(x-1)+\cos(x-1)}{\underbrace{x(x^2+4x+4)}_{\to9}(2x^2-2x)(1-x)} = \frac{1}{9}\lim_{x\to1}\frac{2\,\mathrm{sen}^2(x-1)-\cos^2(x-1)+\cos(x-1)}{\underbrace{2x}_{\to2}(x-1)(-(x-1))} =$$

$$= -\frac{1}{18}\lim_{x\to1}\frac{2\,\mathrm{sen}^2(x-1)-\cos^2(x-1)+\cos(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{18}\lim_{x\to1}\left(2\frac{\mathrm{sen}^2(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}\cos(x-1)\right) =$$

$$= -\frac{1}{18}\lim_{t\to0}\left(2\left(\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\right)^2+\frac{1-\cos t}{t^2}\cos t\right) = -\frac{1}{18}\left(2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\right) = -\frac{5}{36}.$$



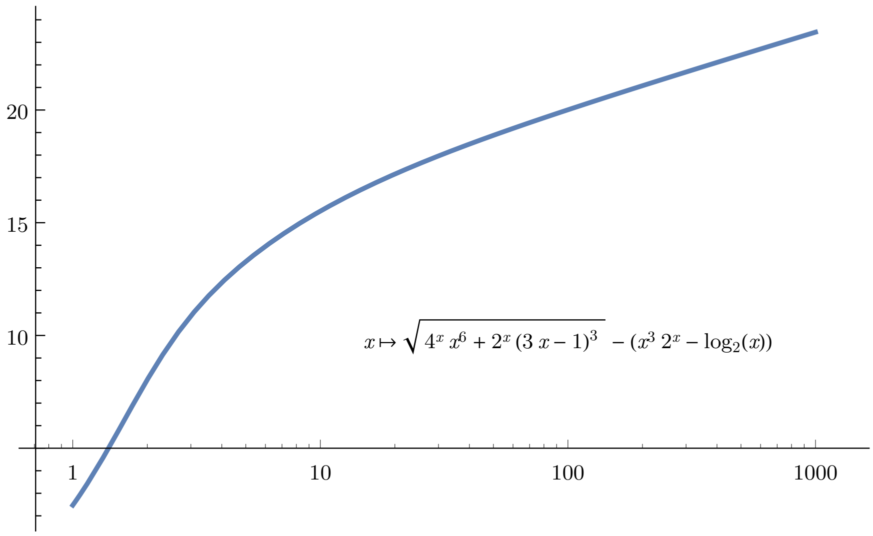
g. Forma indeterminata $+\infty-\infty$. I termini principali $x^3 2^x$ sono identici. Il termine $\log_2 x$ è minuscolo rispetto al termine accanto, ma sarebbe un errore trascurarlo: in fin dei conti risulterà cruciale. Irrazionalizziamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4^x x^6+2^x(3x-1)^3}-(x^3 2^x-\log_2 x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4^x x^6+2^x(3x-1)^3\right)-(x^3 2^x-\log_2 x)^2}{\sqrt{2^{2x}x^6+2^x(3x-1)^3}+(x^3 2^x-\log_2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x x^6+2^x(3x-1)^3-2^{2x}x^6-(\log_2 x)^2+2x^3 2^x\log_2 x}{\sqrt{2^{2x}x^6(1+2^{-x}(3x-1)^3}+(x^3 2^x-\log_2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(3x-1)^3-(\log_2 x)^2+2x^3 2^x\log_2 x}{\sqrt{2^{2x}x^3(1+2^{-x}(3x-1)^3}+(x^3 2^x-\log_2 x)}=$$

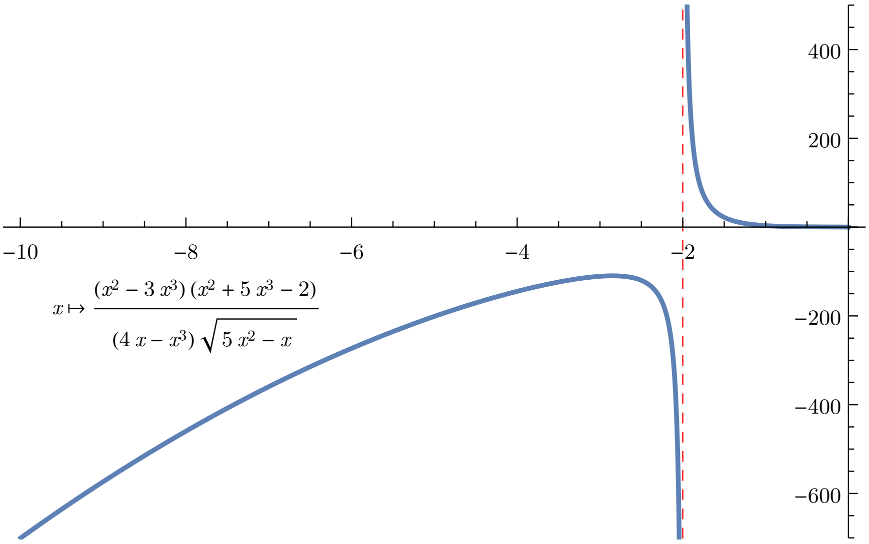
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x x^3\left(\left(\frac{3x-1}{x}\right)^3-\frac{(\log_2 x)^2}{2^x x^3}+2\log_2 x\right)}{2^x x^3\left(\sqrt{1+2^{-x}(3x-1)^3}+1-\frac{\log_2 x}{2^x x^3}\right)}=\frac{3^3-0+\infty}{\sqrt{1}+1-0}=+\infty\,.$$



h. L'unica difficoltà è ricordarsi che $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, in quanto x è negativo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-3x^3)(x^2+5x^3-2)}{(4x-x^3)\sqrt{5x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(x^{-1}-3)\cdot x^3(x^{-1}+5-2x^{-3})}{x^3(4x^{-2}-1)\sqrt{x^2(5-x^{-2})}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6}{x^3|x|}\cdot\frac{(x^{-1}-3)(x^{-1}+5-2x^{-3})}{(4x^{-2}-1)\sqrt{5-x^{-2}}}=\frac{-3\cdot 5}{-1\sqrt{5}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6}{x^3(-x)}=\frac{3\cdot 5}{\sqrt{5}}\lim_{x\to-\infty}-x^2=-\infty\,.$$

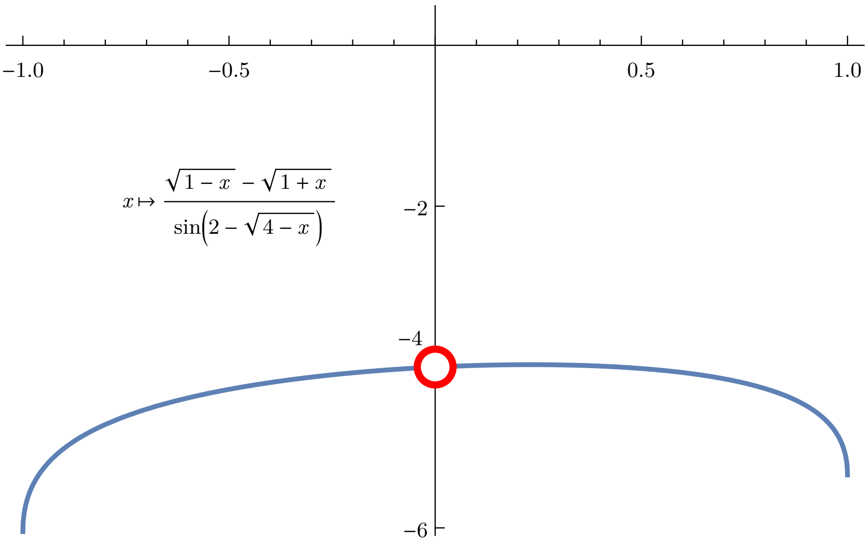


i. Forma indeterminata $0/0$. Il numeratore si può irrazionalizzare, mentre il denominatore si può riportare al limite notevole $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}\bigl(2-\sqrt{4-x}\bigr)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)-(x+1)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x}}{\operatorname{sen}\bigl(2-\sqrt{4-x}\bigr)} \cdot \frac{1}{2-\sqrt{4-x}} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}} \cdot x \cdot \frac{2+\sqrt{4-x}}{\bigl(2-\sqrt{4-x}\bigr)\bigl(2+\sqrt{4-x}\bigr)} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{2+\sqrt{4-x}}{4-(4-x)} = -\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{2+\sqrt{4-x}}{x} = -(2+\sqrt{4}) = -4\,.$$



j. Ci si può liberare subito del fattore $\sqrt{x+1}$ che tende a 1. Ricordarsi che $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = |\operatorname{sen} x|$, e che $\operatorname{sen} x$ ha lo stesso segno di x quando x è attorno a 0:

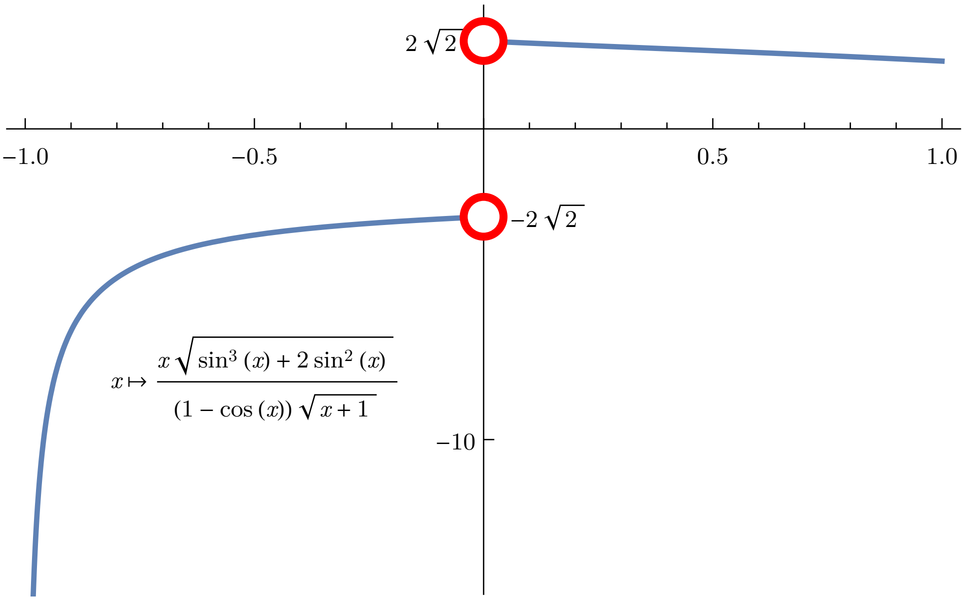
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x}}{(1-\cos x)\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen} x + 2)}}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}\sqrt{x+1}} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \cdot \sqrt{\operatorname{sen} x + 2} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}.$$

Bisogna distinguere i due casi $x \to 0^{\pm}$:

$$2\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2\sqrt{2}, \qquad 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = -2\sqrt{2}\,.$$

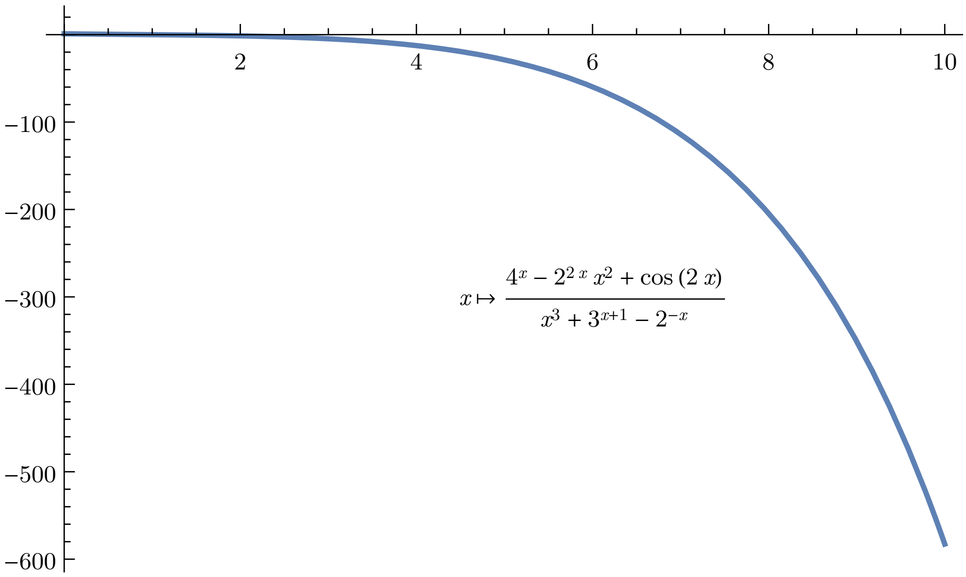
I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Pertanto il limite assegnato non esiste.



k. Raccogliamo i termini dominanti a numeratore e a denominatore:

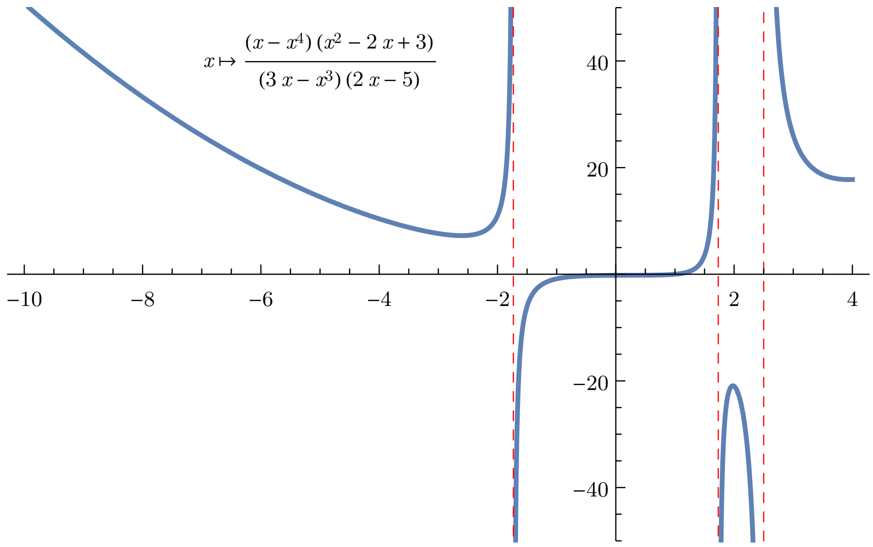
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-2^{2x}x^2+\cos 2x}{x^3+3^{x+1}-2^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}x^2(x^{-2}-1+2^{-2x}x^{-2}\cos 2x)}{3^x(3^{-x}x^3+3-2^{-x}3^{-x})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^2}{3}\right)^x\cdot x^2\cdot\frac{x^{-2}-1+2^{-2x}x^{-2}\cos 2x}{3^{-x}x^3+3-2^{-x}3^{-x}}=+\infty\cdot(+\infty)\cdot\frac{0-1+0}{0+3-0}=-\infty\,.$$

Il $\cos 2x$ non ha limite per $x\to+\infty$, però è compreso fra -1 e 1, e quindi il suo prodotto per l'infinitesimo $2^{-2x}x^{-2}$ tende a 0.



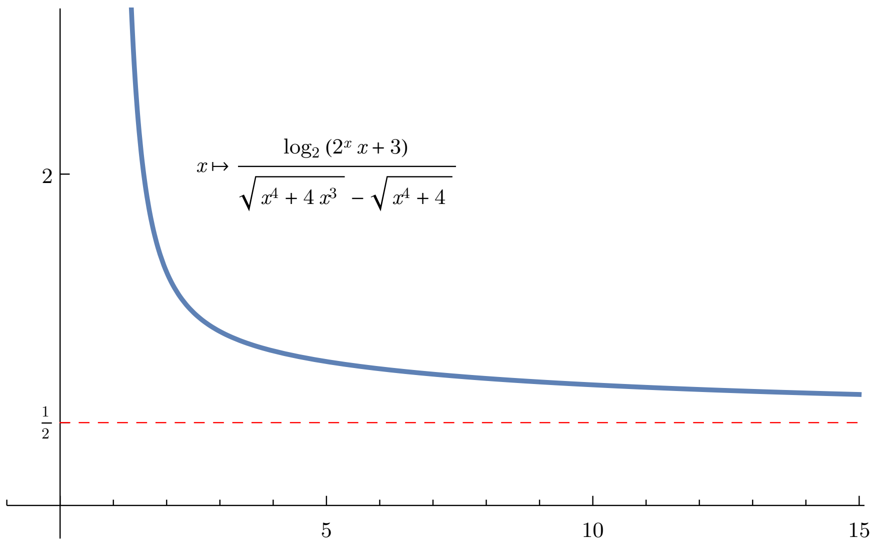
l. Forma indeterminata ∞/∞. Raccogliere i termini principali:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-x^4)(x^2-2x+3)}{(3x-x^3)(2x-5)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(x^{-3}-1)\cdot x^2(1-2x^{-1}+3x^{-2})}{x^3(3x^{-2}-1)\cdot x(2-5x^{-1})}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot\frac{(x^{-3}-1)(1-2x^{-1}+3x^{-2})}{(3x^{-2}-1)(2-5x^{-1})}=+\infty\cdot\frac{-1}{-2}=+\infty\,.$$



m. Forma indeterminata $\infty/(\infty-\infty)$. Raccogliere i fattori principali e razionalizzare:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(2^x x+3)}{\sqrt{x^4+4x^3}-\sqrt{x^4+4}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(2^x x(1+3\cdot 2^{-x}x^{-1})}{(x^4+4x^3)-(x^4+4)} \cdot \left(\sqrt{x^4+4x^3}+\sqrt{x^4+4}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(2^x)+\log_2 x+\log_2(1+3\cdot 2^{-x}x^{-1})}{4x^3-4} \cdot x^2 \cdot \left(\sqrt{1+4x^{-1}}+\sqrt{1+4x^{-4}}\right) = \\
&= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\log_2 x+\log_2(1+3\cdot 2^{-x}x^{-1})}{x^3(4-4x^{-3})} \cdot x^2 = \\
&= \frac{2}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\log_2 x+\log_2(1+3\cdot 2^{-x}x^{-1})}{x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\log_2 x}{x}+\frac{\log_2(1+3\cdot 2^{-x}x^{-1})}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(1+0+\frac{\log_2(1+0)}{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$



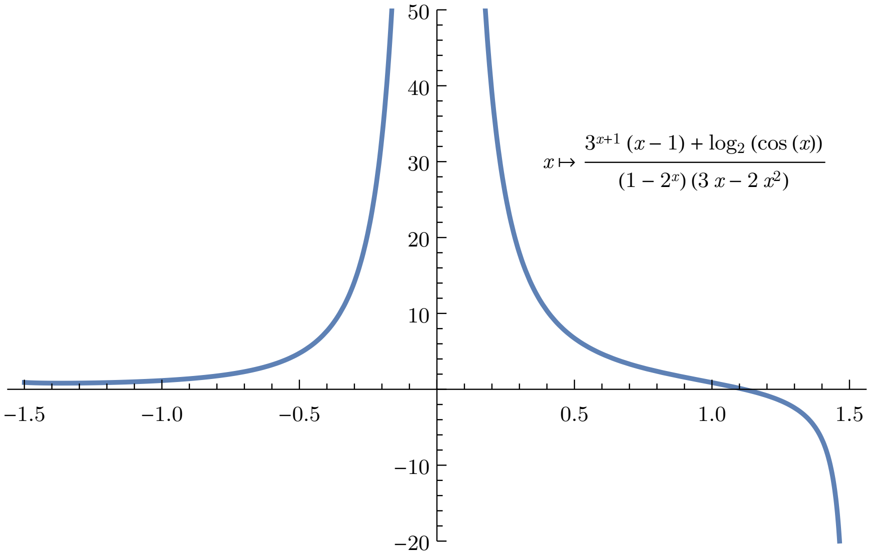
n. Si presenta nella forma $-3/0$, che non è indeterminata:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3^{x+1}(x-1)+\log_2(\cos x)}{(1-2^x)(3x-2x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3^{x+1}(x-1)+\log_2(\cos x)}{(1-2^x)\cdot x(3-2x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1-2^x)} \cdot \frac{3^{x+1}(x-1)+\log_2(\cos x)}{3-2x} = \frac{3^1(0-1)+\log_2(\cos 0)}{3-0} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1-2^x)} = \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1-2^x)}\,.
\end{aligned}$$

Bisogna studiare il segno del denominatore. L'esponenziale 2^x è maggiore di 1 per $x > 0$, ed è minore di 1 per $x < 0$. Quindi

$$-\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x(1-2^x)} = -\frac{1}{0^- 0^+} = +\infty\,, \qquad -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(1-2^x)} = -\frac{1}{0^+ 0^-} = +\infty\,.$$

Concludiamo che il limite di partenza esiste e vale $+\infty$.

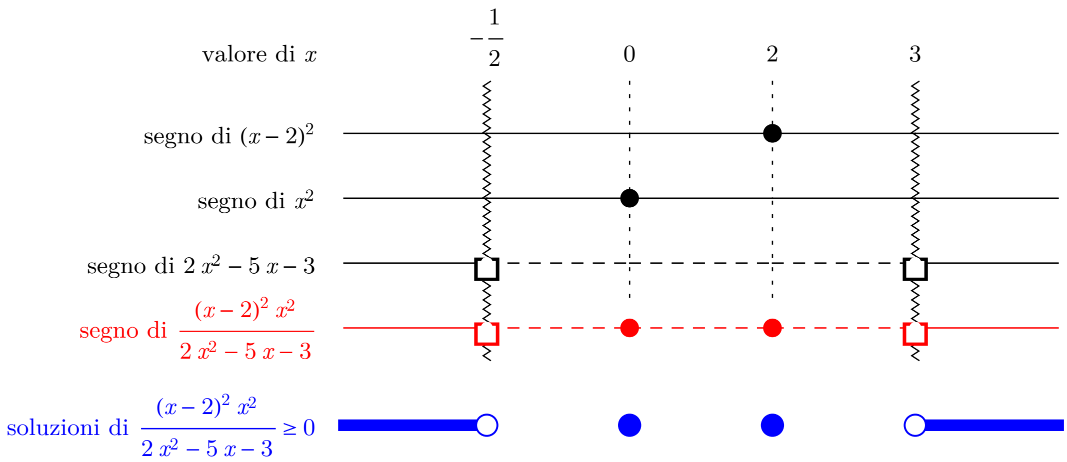


2. a. Si tratta di una disequazione fratta. Portiamo tutto al primo membro, fattorizziamo e applichiamo la regola dei segni:

$$\frac{7x^2-9x}{2x^2-5x-3} \geq 3x-2x^2 \iff \frac{7x^2-9x-(3x-2x^2)(2x^2-5x-3)}{2x^2-5x-3} \iff$$

$$\iff \frac{4x^4-16x^3+16x^2}{2x^2-5x-3} \geq 0 \iff 4\frac{x^2(x^2-4x+4)}{2x^2-5x-3} \geq 0 \iff$$

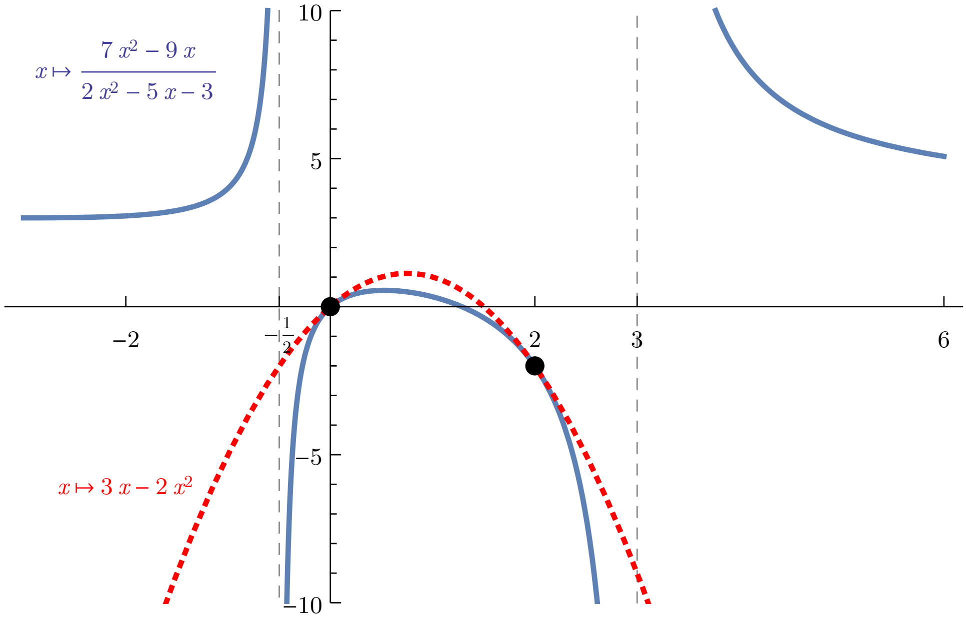
$$\iff \frac{x^2(x-2)^2}{2x^2-5x-3} \geq 0 \iff$$



$$\iff \quad x < -1/2 \lor x = 0 \lor x = 2 \lor x > 3$$

Lo schema grafico precedente va interpretato come segue: nelle righe che cominciano con "segno di", i tratti continui significano segno > 0, quelli tratteggiati segno < 0, i punti pieni sono zeri al numeratore, i quadratini vuoti sono zeri al denominatore, le linee verticali a zigzag mettono in guardia contro i punti in cui l'espressione non è definita. In rosso ci sono le conseguenze della regola dei segni. Nella riga finale blu i simboli hanno segno diverso: riga continua o puntino pieno vuol dire che si tratta di soluzioni della disequazione, puntino vuoto o niente riga vuol dire che non sono soluzioni.

Complemento. Nella figura seguente in blu c'è il grafico del primo membro della disequazione, in rosso tratteggiato il grafico del secondo membro. Le due soluzioni isolate della disequazione ($x = 0$ e $x = 2$) corrispondono a punti in cui le due curve sono fra loro tangenti.



b. La disequazione si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono valori assoluti o max:

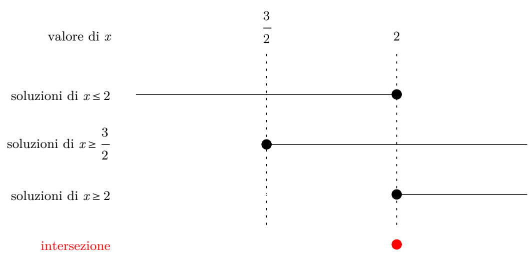
$$\max\{x-1, |2-x|\} - |2-x| \geq x-1 \iff$$

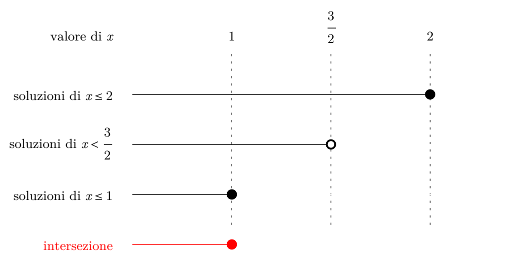
$$\iff \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \max\{x-1, 2-x\} - (2-x) \geq x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x < 0 \\ \max\{x-1, -(2-x)\} - \big(-(2-x)\big) \geq x-1 \end{cases} \iff$$

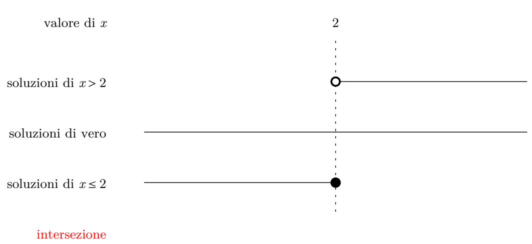
$$\iff \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-1 \geq 2-x \\ (x-1)-(2-x) \geq x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-1 < 2-x \\ (2-x)-(2-x) \geq x-1 \end{cases} \vee$$

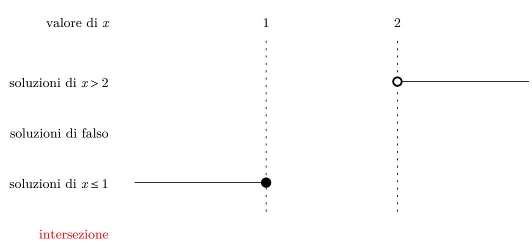
$$\vee \begin{cases} 2-x < 0 \\ x-1 \geq -(2-x) \\ x-1+(2-x) \geq x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x < 0 \\ x-1 < -(2-x) \\ -(2-x)+(2-x) \geq x-1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3/2 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x < 3/2 \\ x \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ \text{vero} \\ x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ \text{falso} \\ x \leq 1 \end{cases} \iff$$





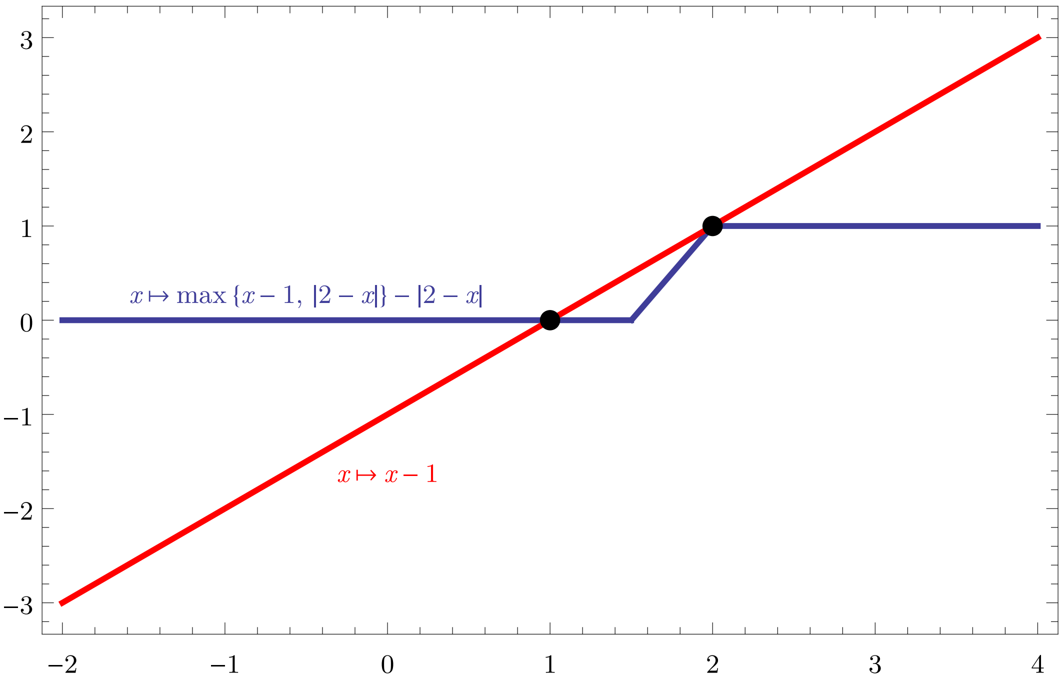




$$\iff \quad x = 2 \quad \vee \quad x \leq 1 \quad \vee \quad \text{falso} \quad \vee \quad \text{falso} \quad \iff$$

$$\iff \quad x = 2 \quad \vee \quad x \leq 1\,.$$

Complemento. Nella figura che segue si vede che la soluzione $x = 2$ corrisponde a un punto in cui i grafici dei due membri della disequazione di partenza si intersecano: quello in blu ha un punto angoloso, e non attraversa il grafico rosso, ma ha una specie di rimbalzo.

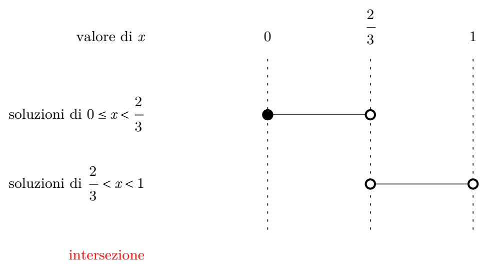


c. La disequazione si presenta nella forma $\sqrt{A} \geq B$, che equivale all'unione di due sistemi che non contengono radicali:

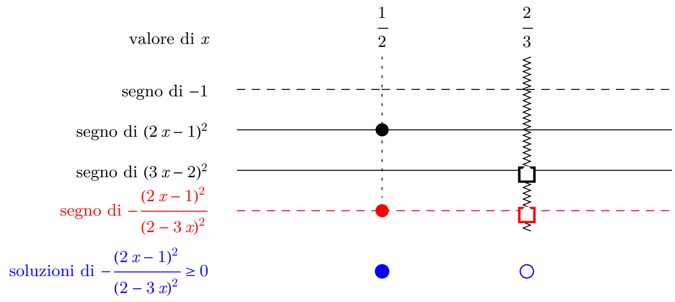
$$\sqrt{\frac{x}{2-3x}} \geq \frac{1-x}{2-3x} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x}{2-3x} \geq 0 \\ \dfrac{1-x}{2-3x} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1-x}{2-3x} \geq 0 \\ \dfrac{x}{2-3x} \geq \left(\dfrac{1-x}{2-3x}\right)^2 \end{cases} \iff$$

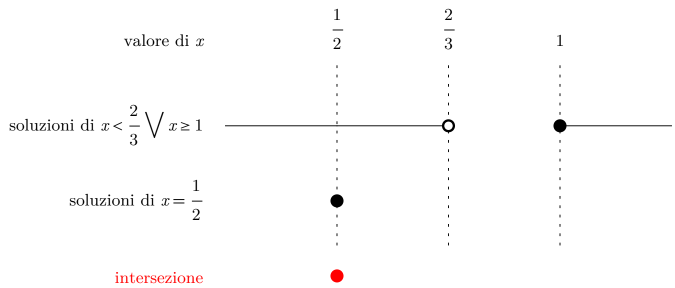
$$\iff \begin{cases} 0 \leq x < 2/3 \\ 2/3 < x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2/3 \vee x \geq 1 \\ \dfrac{x(2-3x)-(1-x)^2}{(2-3x)^2} \geq 0 \end{cases} \iff$$



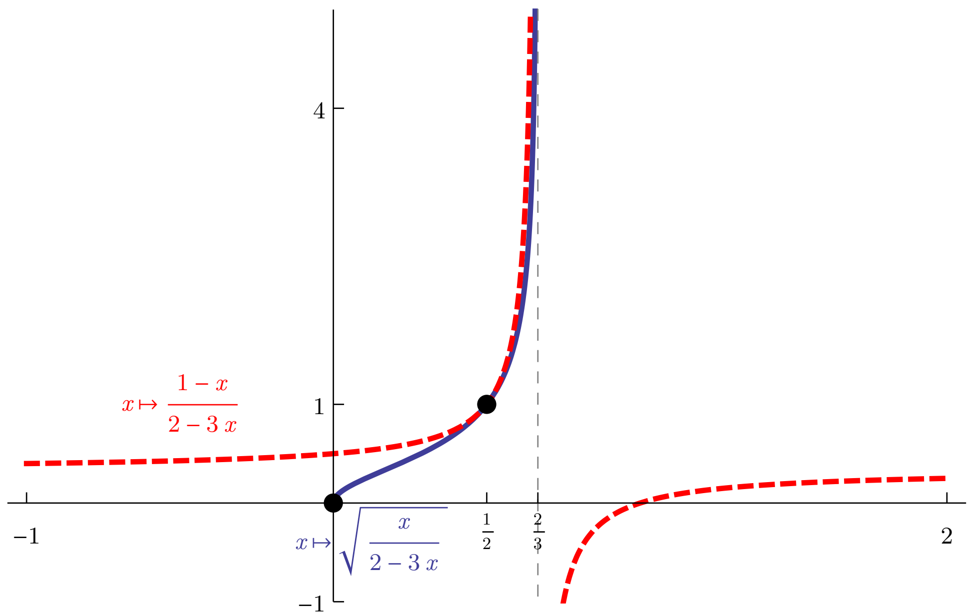
$$\iff \text{falso} \vee \begin{cases} x < 2/3 \vee x \geq 1 \\ \dfrac{-4x^2+4x-1}{(2-3x)^2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2/3 \vee x \geq 1 \\ \dfrac{-(2x-1)^2}{(2-3x)^2} \geq 0 \end{cases} \iff$$



$$\iff \begin{cases} x < 2/3 \vee x \geq 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \iff x = 1/2\,.$$



In definitiva la disequazione ha l'unica soluzione $x = 1/2$.
Complemento. Nella figura seguente in rosso e in blu ci sono i grafici dei due membri della disequazione di partenza. La soluzione $x = 1/2$ corrisponde a un punto di tangenza fra i due grafici.



3. Il predicato $\mathcal{P}(n)$ da dimostrare è

$$(1+x)^{n+1/2} \geq 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)x \qquad \forall x \geq -1\,.$$

Il caso base $\mathcal{P}(1)$ è

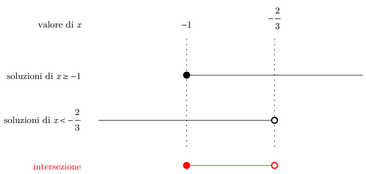
$$(1+x)^{1+1/2} \geq 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x \qquad \forall x \geq -1\,,$$

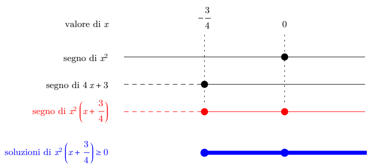
cioè

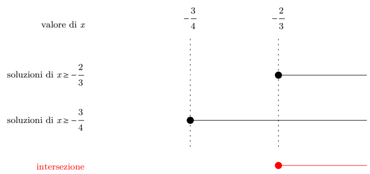
$$(1+x)^{3/2} \geq 1 + \frac{3}{2}x \qquad \forall x \geq -1\,.$$

La disuguaglianza è una disequazione irrazionale del tipo $\sqrt{A} \geq B$ nell'incognita x:

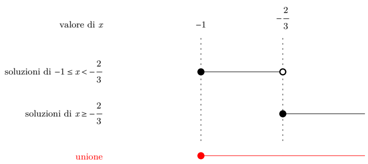
$$
\begin{gathered}
(1+x)^{3/2} \geq 1+\frac{3}{2}x \iff \sqrt{(1+x)^3} \geq 1+\frac{3}{2}x \iff \\
\iff \begin{cases} (1+x)^3 \geq 0 \\ 1+\frac{3}{2}x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1+\frac{3}{2}x \geq 0 \\ (1+x)^3 \geq (1+\frac{3}{2}x)^2 \end{cases} \iff \\
\iff \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x < -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -2/3 \\ 1+3x+3x^2+x^3 \geq 1+\frac{9}{4}x^2+3x \end{cases} \iff \\
\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -2/3 \\ (3-\frac{9}{4})x^2+x^3 \geq 0 \end{cases} \iff \\
\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -2/3 \\ x^2(x+\frac{3}{4}) \geq 0 \end{cases} \iff
\end{gathered}
$$







$$
\iff \quad -1 \leq x < -2/3 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -2/3 \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \iff \quad -1 \leq x < -2/3 \vee x \geq -2/3 \quad \iff
$$



$$
\iff \quad x \geq -1\,.
$$

Effettivamente $\mathcal{P}(1)$ è vero. Per il passo induttivo, scriviamo per disteso $\mathcal{P}(n+1)$:

$$
(1+x)^{n+1+1/2} \geq 1+\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x \qquad \forall x \geq -1\,.
$$

Confrontiamo i primi membri delle disuguaglianze per $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n+1)$:

$$
(1+x)^{n+1/2}\,, \qquad (1+x)^{n+1+1/2}\,.
$$

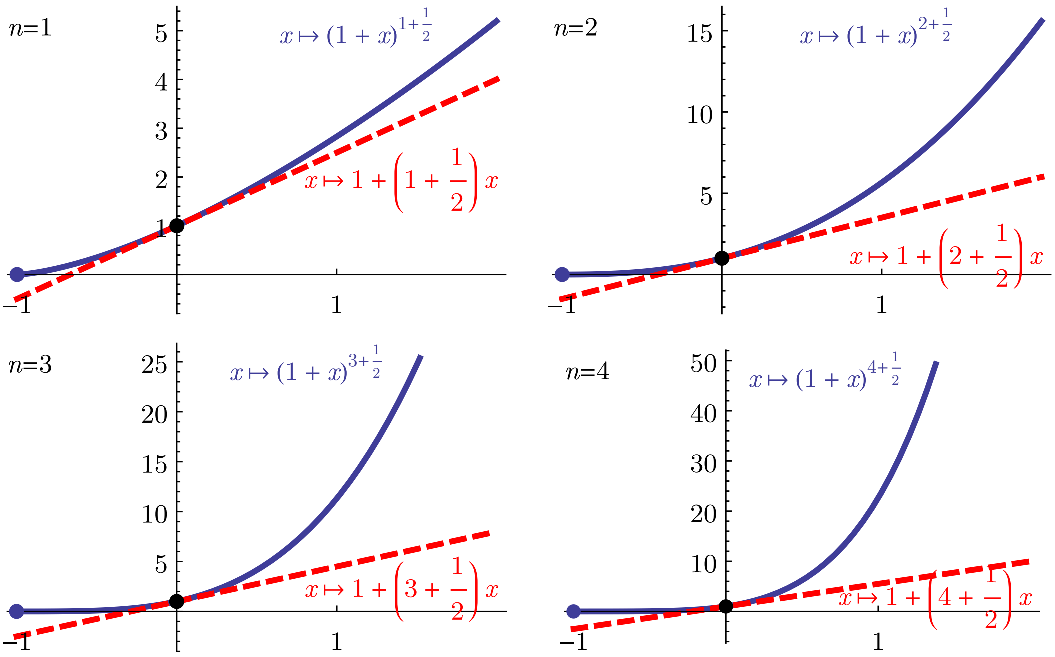
Come succede anche nella disuguaglianza di Bernoulli, il secondo membro si ottiene dal primo moltiplicando per $1+x$, che per noi è ≥ 0 perché ci interessano soltanto gli $x \geq -1$. Come con Bernoulli, moltiplichiamo per $1+x$ ambo i membri della disuguaglianza di $\mathcal{P}(n)$:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{P}(n) \\
& \Updownarrow \qquad \text{definizione} \\
& (1+x)^{n+1/2} \geq 1+\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\
& \Downarrow \qquad \text{moltiplicare membro a membro per } 1+x \\
(1+x)^{n+1+1/2} &\geq \left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)(1+x) = \\
&= 1+x+\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2 = \\
&= 1+\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x+\underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2}_{\geq 0} \geq \qquad \text{togliendo un addendo positivo la somma rimpicciolisce} \\
&\geq 1+\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x+0
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow \qquad \text{proprietà transitiva della disuguaglianza}$$
$$(1+x)^{n+1+1/2} \geq 1 + \left(n+1+\frac{1}{2}\right)x$$
$$\Updownarrow \qquad \text{definizione}$$
$$\mathcal{P}(n+1)\,.$$

Il passo induttivo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ è verificato.

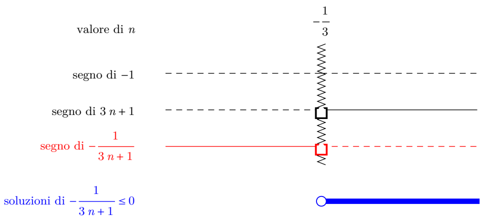
Complemento. La figura seguente mostra in blu e in rosso i grafici dei due membri della $\mathcal{P}(n)$ per $n = 1, 2, 3, 4$. Si nota che le curve in blu e rosso sono tangenti fra loro per $x = 0$, mentre altrove la curva in blu sta sopra.

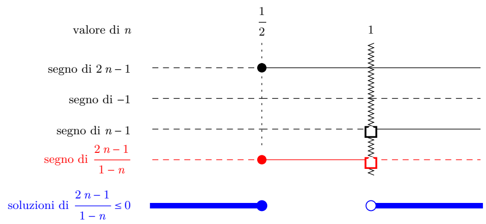


4. Dimostrare che $1/3$ è maggiorante dell'insieme $X = \{n/(n+2|n|+1) \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$ significa dimostrare che le soluzioni della disequazione $n/(n+2|n|+1) \leq 1/3$ comprendono tutti gli $n \in \mathbb{Z}$. Risolviamola in prima istanza come disequazione sui reali, distinguendo a seconda che n sia positivo o negativo:

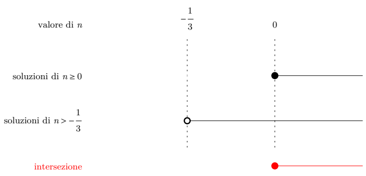
$$\frac{n}{n+2|n|+1} \leq \frac{1}{3} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{n+2n+1} \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{n-2n+1} \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{3n+1} \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{1-n} \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{3n-(3n+1)}{3n+1} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{3n-(1-n)}{1-n} \leq 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-1}{3n+1} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{2n-1}{1-n} \leq 0 \end{cases} \iff$$

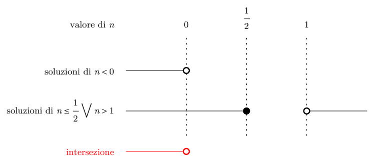
n	$n/(n+2\|n\|+1)$
-9	$-0{,}9000$
-8	$-0{,}8889$
-7	$-0{,}8750$
-6	$-0{,}8571$
-5	$-0{,}8333$
-4	$-0{,}8000$
-3	$-0{,}7500$
-2	$-0{,}6667$
-1	$-0{,}5000$
0	$0{,}0000$
1	$+0{,}2500$
2	$+0{,}2857$
3	$+0{,}3000$
4	$+0{,}3077$
5	$+0{,}3125$
6	$+0{,}3158$
7	$+0{,}3182$
8	$+0{,}3200$
9	$+0{,}3214$

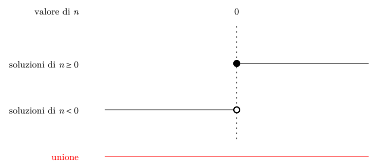




$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n > -1/3 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n \leq 1/2 \vee n > 1 \end{cases} \iff$$







$$\iff n \geq 0 \vee n < 0 \iff \text{vero} \iff n \in \mathbb{R} \Leftarrow n \in \mathbb{Z}.$$

La disuguaglianza è vera per tutti gli n reali, e di conseguenza anche per tutti gli n interi. Concludiamo che effettivamente $1/3$ è un maggiorante di X. Per vedere se è il massimo di X ripercorriamo rapidamente i passaggi precedenti con uguaglianza invece che disuguaglianza:

$$\frac{n}{n+2|n|+1} = \frac{1}{3} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{n+2n+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{n-2n+1} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-1}{3n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{2n-1}{1-n} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \text{falso} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n = 1/2 \end{cases} \iff \text{falso.}$$

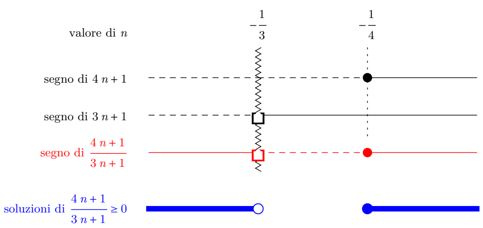
Dunque $1/3$ non è elemento di X, e quindi non può essere il massimo di X. I conti per verificare che -1 è minorante sono simili:

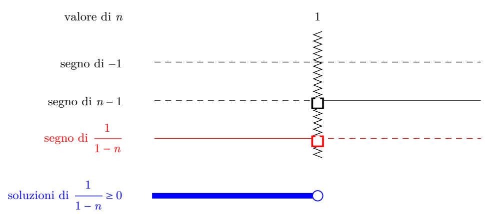
$$\frac{n}{n+2|n|+1} \geq -1 \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{n+2n+1} \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{n-2n+1} \geq -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{3n+1} \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{1-n} \geq -1 \end{cases} \iff$$

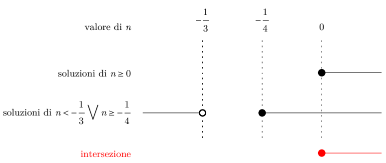
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n+(3n+1)}{3n+1} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n+(1-n)}{1-n} \geq 0 \end{cases} \iff$$

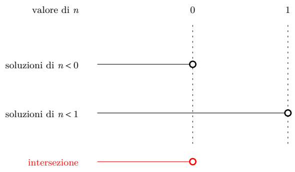
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4n+1}{3n+1} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1}{1-n} \geq 0 \end{cases} \iff$$

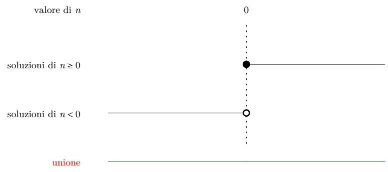




$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n < -1/3 \vee n \geq -1/4 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n < 1 \end{cases} \iff n \geq 0 \vee n < 0 \iff \text{vero.}$$







Lo stesso per verificare se -1 è minimo:

$$\frac{n}{n+2|n|+1} = -1 \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{n+2n+1} = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{n-2n+1} = -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4n+1}{3n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1}{1-n} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n = -1/4 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \text{falso} \end{cases} \iff \text{falso.}$$

Poiché $-1 \notin X$, -1 non può essere il minimo di X. Per studiare l'estremo inferiore e superiore di X conviene prima calcolare il limite per $n \to \pm\infty$ di $n/(n+2|n|+1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2|n|+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{n}{n+2|n|+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{-n+1} = -1\,.$$

Dalla definizione di limite segue che i numeri minori di $1/3$ non possono essere maggioranti, e i numeri maggiori di -1 non possono essere minoranti, ossia

$$\inf X \leq -1 < \frac{1}{3} \leq \sup X.$$

Ne segue che $1/3$ è il più piccolo dei maggioranti, cioè l'estremo superiore di X, mentre -1 è il più grande dei minoranti, ossia è l'estremo inferiore.
Possiamo anche rifarci direttamente alla definizione di maggiorante: prendiamo un numero minore di $1/3$, che indicheremo con $1/3-\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Esistono punti di X maggiori di $1/3-\varepsilon$? In altre parole, esistono n interi tali che $n/(n+2|n|+1) > 1/3-\varepsilon$? È sufficiente trovarne di positivi:

$$\frac{n}{n+2|n|+1} > \frac{1}{3} - \varepsilon \impliedby \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{n+2|n|+1} > \dfrac{1-3\varepsilon}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{3n+1} > \dfrac{1-3\varepsilon}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{3n-(1-3\varepsilon)(3n+1)}{\underbrace{3n+1}_{>0}} > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ (3-3+3\varepsilon)n > 1-3\varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n > \dfrac{1-3\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}$$

Per il principio di Archimede, certamente l'ultimo sistema ha soluzioni intere. Per quegli n vale la disuguaglianza $n/(n+2|n|+1) > 1/3-\varepsilon$. Pertanto $1/3-\varepsilon$ non è maggiorante.
Analogamente si può ragionare con -1. Prendiamo un numero maggiore di -1, che indicheremo con $-1+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Esistono punti di X minori di $-1+\varepsilon$? In altre parole, esistono n interi tali che $n/(n+2|n|+1) < -1+\varepsilon$? È sufficiente trovarne di negativi:

$$\frac{n}{n+2|n|+1} < -1+\varepsilon \impliedby \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n}{1-n} < -1+\varepsilon \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n-(-1+\varepsilon)(1-n)}{\underbrace{1-n}_{>0}} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n < 0 \\ (1-1+\varepsilon)n < \varepsilon - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} n < 0 \\ n < \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\,. \end{cases}$$

Di nuovo per il principio di Archimede, certamente l'ultimo sistema ha soluzioni intere. Per tali valori di n vale la disuguaglianza $n/(n+2|n|+1) < -1+\varepsilon$. Pertanto $-1+\varepsilon$ non è minorante.

Complemento. La struttura dell'insieme X: