Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 4 febbraio 2011

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-\pi+\operatorname{sen} 2x)+2\sqrt{1-x}\arccos 2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(x^2-2x)-3(e^x-1)^2+2\operatorname{sen} x\cos x}{(x^2-4x)\log(\cos x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-\operatorname{sen} x)\cos x+(x+1)^2\log(x+1)}{\operatorname{sen}(1-\sqrt{x^2+1})}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^2 x}}{2(1-\cos x)\sqrt{x+1}}$

2. Data la funzione $f(x) := x^2-1-4\ln\dfrac{|x+1|}{2}$, si studino **(a)** il dominio di definizione e le eventuali simmetrie; **(b)** i limiti sulla frontiera del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, e gli intervalli di convessità e concavità; **(e)** il segno di $f(x)$, alla luce dei punti precedenti. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-2x^3-1}{x^2+2x+5}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{3x^2}{x^6+1}-\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,,\qquad \text{(c)}\quad e^x(\operatorname{sen} x-\cos x)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}(x^2-1)}$, ad esempio con la sostituzione $y = 1/(x^2-1)$.

5. Dimostrare per induzione su n che $(1+x)^n\cdot\sqrt{1+x} \geq 1+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ quando $x \geq -1$ e $n \geq 1$.
(Il passo induttivo da n a $n+1$ si fa come nella disuguaglianza di Bernoulli).

Punti: 2+4+3+2, 1+2+2+2+3+1, 4+3+4, 6, 6.