Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 3 settembre 2010

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3-7(1-x^2)\operatorname{arcsen} x + (x-3)e^{-2x}}{\big(\log(2+x^2)-\log(2-x^2)\big)(x+1)^{-1/x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)-2(1-x^2)^3+3x-3(x+1)(e^x-\cos x)}{(1-\sqrt{1-x})\big(\log(1-x)\big)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\right)^{1-2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{9-\arccos x}{\log(1-x)-\log(1+x)}$

2. Data la funzione $f(x) := x^2 - 2\arctan\frac{1}{1-x^2}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** i limiti sulla frontiera del dominio e gli eventuali asintoti (si ricordi che $\arctan 1 = \pi/4$ e che $\arctan x \to \pm\pi/2$ per $x \to \pm\infty$); **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** usando i risultati precedenti mostrare che la f non si annulla mai. **(e)** calcolare la derivata seconda, mostrando che il grafico di f ha almeno un flesso di ascissa > 1; **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{4x^4-3x^2-2}{2x^2+2x+1}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}} - (1-2x)e^{x-x^2}\,,\qquad \text{(c)}\quad (x^2-1)\operatorname{sen} 2x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt[3]{x+1}$.

5. Dimostrare per induzione che $(1-1^2)^2+(2-2^2)^2+(3-3^2)^2+(4-4^2)^2+\cdots+(n-n^2)^2 = \dfrac{1}{15}n(n^2-1)(3n^2-2)$.

Punti: 3+4+2+2, 1+3+2+2+3+1, 4+3+4, 6, 6.