Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, Tema A

Prova Scritta del 22 luglio 2010

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^3-x^2+3}-\sqrt{x^4+2x^3+4x^2-x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2(x+1)\log(1-x^2)+4x-(e^x-e^{-x})(2\cos x-\operatorname{sen} x)}{(1-x-\sqrt{x+1})(\cos x-e^x)^2}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{7-\sqrt{1+2\cos 3x}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2-x}}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2\arctan x-(x+e^{2x})\operatorname{sen} x}{(x+1)^{-2/x}(\cos 2x-\cos x)}$

2. Data la funzione $f(x):=x^2-2x+2\log|1+x|$, si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità, i flessi; **(e)** usando i risultati precedenti mostrare che la f si annulla in esattamente due punti. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{2x^4+5x^3-1}{2x^2+5x+2}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}-\frac{e^x-2e^{-2x}}{e^{-2x}+e^x}\,,\qquad \text{(c)}\quad x^2\arctan\frac{x}{2}\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x-1}}$, ad esempio con la sostituzione $y=1-1/x$.

5. Dimostrare per induzione che $1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

Punti: 2+4+3+4, 1+2+2+2+3+1, 4+3+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 22 luglio 2010

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x + (e^x - e^{-x})(\operatorname{sen} x - 2\cos x) - 2(x-1)\log(1-x^2)}{(e^x - \cos x)^2 (x + 1 - \sqrt{1-x})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^3 - 4x^2 + 3} - \sqrt{x^4 - x^3 + 2x^2 + x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{10 - \sqrt{2 + \cos 3x}}{\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{x+2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x - e^{-x})\operatorname{sen} x + (2-x)^2 \arctan x}{(1-x)^{3/x}(\cos x - \cos 2x)}$

2. Data la funzione $f(x) := -x^2 - 2x - 2\log|1-x|$, si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità, i flessi; **(e)** usando i risultati precedenti mostrare che la f si annulla in esattamente due punti. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)} \quad \frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 3x - 2}, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} - \frac{2e^{2x} - e^{-x}}{e^{-x} + e^{2x}}, \quad \text{(c)} \quad x^2 \arctan 2x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$, ad esempio con la sostituzione $y = -1 + 1/x$.

5. Dimostrare per induzione che $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

Punti: 4+2+3+4, 1+2+2+2+3+1, 4+3+4, 6, 6.