Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 4 febbraio 2010

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-x)\operatorname{sen} x - \tan x}{(e^{-x}-1)\ln(1+x)}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log(x^2+1)-(x^2-1)\arctan x - x}{(1-\cos x)\sqrt{x^3+x^2}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(2+\sqrt{x})-\log_2(3+2^x)}{(1-e^{2x})\operatorname{sen} x\cos x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-x-e^{\operatorname{sen} x}+\log\bigl(1-\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\bigr)}{\bigl(x+2\bigr)^x-1+\log\bigl(1+\arctan x\bigr)}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2-3x}{x^2+2x+5}$, si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda (si può indovinare un punto in cui si annulla), gli intervalli di convessità/concavità. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{3x^4+x}{x^2-2x+5}$, (b) $\dfrac{1}{2\bigl(1+(1+\sqrt{x})^2\bigr)\sqrt{x}} - \dfrac{(x^2-5x)^2}{x^2}$, (c) $e^x(x-2\cos x)$.

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, ad esempio con la sostituzione $x = 1/(1+y)$.

5. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $\log(1-x^2)\operatorname{sen} x$ di ordine 3, (b) $\dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{1-2x}$ di ord. 3, (c) $(1-\cos x)^2$ di ord. 7.

6. Dimostrare per induzione che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6-2k^2}{3^k} = \frac{n(n+3)}{3^n}$.

Punti: 4+3+4+3, 1+1+2+2+3+2, 4+4+4, 6, 3+3+3, 6.