Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 settembre 2009

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x)+(2-2x)\cos x-2\sqrt{1-x}}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\sqrt{\cos x})}$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n!-n}{(n-2)!(n^2+1)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(x^2-x)\cos x+e^x\operatorname{sen}2x+4(e^{-x}-\cos x)\operatorname{sen}x}{(1-e^x)(2\tan x-\log(1+2x))}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-4}{(e^{2x}-1)(x^4-2x^2)}$.

2. Data la funzione $f(x):=\dfrac{x(x^2-1)}{x^2-9}$, si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale (per risolvere l'equazione può servire la variabile ausiliaria $u=x^2$); **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{2x^4+3x^3-1}{2x^2+3x-2}$, (b) $\dfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}}-\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x}$, (c) $(x-e^x)\cos x$.

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x^3}$, per esempio con la sostituzione $x=y^{-2/3}$.

5. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0=0$:

(a) $\dfrac{x+1}{1+x^2}$ di ordine 3, (b) $(1+x)\log(1-x)$ di ord. 3, (c) $\dfrac{\cos x}{x^4-1}$ di ord. 7.

6. Dimostrare (per esempio per induzione su n) che la disuguaglianza $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n\ge 1+2nx$ vale per ogni $n\in\mathbb{N}$ e per ogni x tale che $-1\le x<1$.

Punti: 3+4+3+3, 2+2+2+4+2+2, 4+3+4, 6, 3+3+3, 6.