Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 1 settembre 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-e^x)\cos x + (x-1)\operatorname{sen} x}{(1-\sqrt{1-x})\log(1+x)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-x^2)+2e^{-x}\log(2-e^x)+x\cos^2 x}{(x^2-2x)(1-\cos x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}}{(\cos x-1)(x-3x^4)}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^3}{4+3x-6x^2}$, si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{4x^4-2x}{2x^2-2x+1}$, (b) $\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)2\sqrt{x}} - (x^3-2x)^2$, (c) $(x^2+1)\arctan x$.

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(x-1)x^{3/2}}$, per esempio con la sostituzione $y = 1/\sqrt{x}$.

5. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $e^{x\log(1+x)}$ di ordine 3, (b) $\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1-x}$ di ord. 3, (c) $\operatorname{sen}(x^3)\cos(x^2)$ di ord. 7.

6. Consideriamo la successione a_n definita per ricorrenza da $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_{n+2} := a_{n+1} + 2a_n$. Dimostrare, per esempio per induzione, che $a_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Punti: 3+4+3+3, 2+3+2+3+3+2, 4+3+4, 6, 3+3+3, 6.