Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 14 luglio 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^x(2x - \operatorname{sen} x) - (2x-1)\log(1-2x)}{(1-e^x)(1-\sqrt{1-\operatorname{sen} x})}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{10e^{-x}(x^2+2x) - 8(x+1)^{5/2} + 33 - 25\cos^2 x}{(x^2-x)(x+2-2\sqrt{x+1})}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2n}\Big)^{1-n}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \cos 3x}{(2x^2-x^4)\log(1-x+x^2)}$.

2. Data la funzione $f(x) := 2x + \log\left|\dfrac{2x-1}{2x^2-1}\right|$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** si mostri che $f(x)$ si annulla in esattamente due punti; **(e)** la derivata seconda, mostrando che questa si annulla in esattamente due punti. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{x^3+2x-2}{x^2-2x+5}$, (b) $\dfrac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} - \dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$, (c) $(x-x^2)\ln(1-x)$.

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x}$.

5. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $(x-2)\ln(2-x)$ di ordine 3, (b) $\dfrac{e^{-x}}{2-x}$ di ord. 3, (c) $e^{-x^2}\cos(x^3)$ di ord. 7.

6. Dimostrare, per esempio per induzione, che vale la disuguaglianza $\dfrac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - nx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x > -1$.

Punti: 3+4+3+3, 2+3+2+3+3+2, 4+3+4, 6, 3+3+3, 6.