Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 settembre 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}x + (x^2+x)\cos x - 2\log(\sqrt{2x+1})}{(x - \operatorname{arcsen}(x^2+2x))\log(1-x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{n^2-3}{2n^2+2}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5(x^2-x)e^{2x} - 2(x-1)^3\log(1-x) + 7\operatorname{sen} x\cos^2 x}{(\log(x+2)-\log 2)(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2})}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{1-|x|}}{(3-\cos x)(\operatorname{sen} x - x)}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-x+1}$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno (una radice si indovina facilmente); **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-4x+5}$, (b) $(2+\operatorname{sen}^2 x)^3 \cdot 2\operatorname{sen} x\cos x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, (c) $e^x \operatorname{sen} x \cos x$.

4. Studiare la convergenza delle serie

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-e^{-1/n}}{n+1}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+2^n}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

5. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log\frac{n^2+2n}{n^2+3n+1}$

a. discuterne la convergenza, usando per esempio il criterio di Leibniz;
b. discuterne la convergenza assoluta.

6. Della funzione di due variabili $f(x,y) := \dfrac{x^2+y^2}{2x-y}$ trovare il dominio e le curve di livello, e descriverle geometricamente.

Punti: 3+3+4+3, 1+2+2+2+2+2, 4+3+4, 3+3+3, 4+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 settembre 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}x + (x^2+x)\cos x - 2\log(\sqrt{2x+1})}{(x - \operatorname{arcsen}(x^2+2x))\log(1-x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{n^2-3}{2n^2+2}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5(x^2-x)e^{2x} - 2(x-1)^3\log(1-x) + 7\operatorname{sen} x\cos^2 x}{(\log(x+2)-\log 2)(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2})}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{1-|x|}}{(3-\cos x)(\operatorname{sen} x - x)}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-x+1}$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno (una radice si indovina facilmente); **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-4x+5}$, (b) $(2+\operatorname{sen}^2 x)^3 \cdot 2\operatorname{sen} x\cos x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, (c) $e^x \operatorname{sen} x \cos x$.

4. Studiare la convergenza delle serie

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-e^{-1/n}}{n+1}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+2^n}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

5. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log\frac{n^2+2n}{n^2+3n+1}$

a. discuterne la convergenza, usando per esempio il criterio di Leibniz;
b. discuterne la convergenza assoluta.

6. Della funzione di due variabili $f(x,y) := \dfrac{x^2+y^2}{2x-y}$ trovare il dominio e le curve di livello, e descriverle geometricamente.

Punti: 3+3+4+3, 1+2+2+2+2+2, 4+3+4, 3+3+3, 4+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 15 settembre 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data l'equazione differenziale scalare del secondo ordine

$$y''(t) = -\sqrt{|y(t)|}\,\mathrm{sgn}\, y(t),$$

a. Discutere esistenza ed eventuale unicità locale per i problemi di Cauchy associati.

b. Trovare l'integrale primo dell'energia, e descriverne gli insiemi di livello.

c. Sfruttando l'integrale primo, discutere l'esistenza e unicità in grande dei problemi di Cauchy.

d. Mostrare che le soluzioni che non partono con $y(0) = y'(0) = 0$ sono periodiche, trovare una formula integrale della soluzione. Mostrare che il periodo tende a zero quando i dati iniziali tendono a 0.

2. Poniamo $I = \{1, 2, 3, 4\}$, e siano $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}^N$ insiemi non necessariamente misurabili, ma due a due disgiunti e con misura esterna di Lebesgue λ^* finita. Quando $J \subseteq I$, diremo che λ^* è additiva su J se $\lambda^*(\bigcup_{i\in J} A_i) = \sum_{i\in J} \lambda^*(A_i)$. Dimostrare che si equivalgono:
1. λ^* è additiva su I;
2. λ^* è additiva su ogni $J \subseteq I$;
3. λ^* è additiva su $\{1, 2\}$ e su $\{3, 4\}$, e inoltre $\lambda^*(\bigcup_{i\in I} A_i) = \lambda^*(A_1 \cup A_2) + \lambda^*(A_3 \cup A_4)$. (Usare la subadditività).

Punti: 5+12+15+10+10+5, 20.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 15 settembre 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1.a. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla al di fuori di un intervallo limitato. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che $g \le f \le h$ e $\int_{\mathbb{R}} (h - g) d\lambda < \varepsilon$.
(Una funzione a gradino si può approssimare dall'alto o dal basso con una funzione continua...)

b. Data una $g\colon \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, si dice che g è *semicontinua inferiormente* se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \mid g(x) > \alpha\}$ è aperto, ed è *semicontinua superiormente* se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \mid g(x) < \alpha\}$ è aperto. Dimostrare le seguenti affermazioni: g è semicontinua inferiormente se e solo se $-g$ lo è superiormente. Se g_i è semicontinua inferiormente per ogni $i \in I$, allora $\sup_{i \in I} g_i$ è ancora semicontinua inferiormente; se g_i è semicontinua superiormente per ogni $i \in I$, allora $\inf_{i \in I} g_i$ è ancora semicontinua superiormente. Infine, una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è semicontinua sia superiormente che inferiormente.

c. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla al di fuori di un intervallo limitato. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann se e solo se esistono $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinue rispettivamente inferiormente e superiormente tali che $g \le f \le h$ dappertutto, e $g = h$ quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue).
(Per una delle implicazioni, osservare che nei punti x in cui $g(x) = h(x)$ la f risulta continua...)

2. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$ e $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ definita da $F(e^{it}) := (t - \pi/2)^2$ se $0 \le t \le \pi$, $F(e^{it}) := (t + \pi/2)^2$ se $-\pi < t < 0$. Indichiamo la base hilbertiana usuale di $L^2(\mathbb{U})$ con $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{U}$. Calcolare i coefficienti di Fourier di F rispetto alla base u_n. Cosa dice l'identità di Bessel per questa F?

Punti: 10+10+10, 15.