Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 21 luglio 2008

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^{1/x}}{(1-\cos(x^3))\big(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\big)}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2-n+5}\right)^{n+2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x\cos x \operatorname{sen} x-(x^2-x)e^{-2x}-\frac{x}{(1-x)^2}}{(x-1+\sqrt{1-2x})\operatorname{sen} x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x+\operatorname{sen} x-2e^x\sqrt{1-x}}{(1-e^x)\big(2x-\arctan(x-x^2)\big)}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^3}{5x^2-2x-3}$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-2x+1}$, (b) $x(1-x^2)^3+\dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$, (c) $(\cos x - x\operatorname{sen} x)e^x$.

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^3+1}$, per esempio con la sostituzione $y = x\sqrt{x}$.

5. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{n^2+1}\log\frac{n+1}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+3n}\right)^{2n^2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{n^2+1}-\frac{2(n-1)}{n^2+2}\right)$.

6. Data la successione $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, dimostrare che $(3/2)^{n-1} \le a_n \le (5/3)^{n-1}$ per ogni $n \ge 6$.

Punti: 3+3+4+3, 1+2+2+2+2+2, 4+3+4, 6, 3+3+3, 6.