Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica, tema A

Compitino del 26 giugno 2008

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

**1.** Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

$$\text{(a)} \quad \log\Big(1 + \frac{2x}{1-x}\Big) \quad \text{di ordine 3,} \qquad \text{(b)} \quad \operatorname{sen} x \cos 2x \quad \text{di ordine 3,}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{3x^2}{1 - 2\operatorname{sen}^4 x} \quad \text{di ordine 7.}$$

**2.** Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$\text{(a)} \quad \frac{x-3}{x^2-2x+5} \qquad \text{(b)} \quad \frac{2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{(c)} \quad \sqrt{\frac{2x-1}{3}}\,.$$

**3.** Calcolare, col metodo per parti ripetuto, una primitiva della funzione $e^{2x}(x + \operatorname{sen} x)$.

**4.** Mostrare che mediante la sostituzione $x = 1/(1-y)$ l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}\,dx$ diventa $\int (1+y)/\sqrt{1-y^2}\,dy$, e quindi calcolarli.

**5.** Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)^{n^2-1}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + e^n}{n^3 + 4n + e^{n+2}},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n! \cdot 5^n \log 3}, \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n+1}}\Big).$$

**6.** Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+3n+1},$$

**a.** studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;

**b.** provare che la serie dei valori assoluti diverge.

**7.** Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+x-2}$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

**8.** Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = 4y^4 + 8y^3 + 8y^2 + 4xy + 6y + x^2 + 3x + 2$. Indagare se sono max/min relativi o punti di sella.

*Punti: 3+3+3, 3+2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 4, 6.*

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica, tema B

Compitino del 26 giugno 2008

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

**1.** Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

$$\text{(a)}\quad \log\Big(1+\frac{x}{1-2x}\Big) \quad \text{di ordine 3,} \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{sen} 2x \cos x \quad \text{di ordine 3,}$$

$$\text{(c)}\quad \frac{2x^2}{1-3\operatorname{sen}^4 x} \quad \text{di ordine 7.}$$

**2.** Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{2x-1}{x^2+2x+5} \qquad \text{(b)}\quad \frac{\cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{(c)}\quad \sqrt{\frac{3x-1}{2}}\,.$$

**3.** Calcolare, col metodo per parti ripetuto, una primitiva della funzione $e^{2x}(x - \operatorname{sen} x)$.

**4.** Mostrare che mediante la sostituzione $x = 1/(1-y)$ l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}\,dx$ diventa $\int (1-y)/\sqrt{1-y^2}\,dy$, e quindi calcolarli.

**5.** Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{3n-1}\Big)^{2n^2}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+e^{n-3}+5}{2n^4+3n^2+e^{n-1}},$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 5^n \log 6}, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\Big).$$

**6.** Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n^2+2n+3},$$

**a.** studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;

**b.** provare che la serie dei valori assoluti diverge.

**7.** Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2-x-2}$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

**8.** Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = 4x^4+8x^3+8x^2+4yx+6x+y^2+3y+2$. Indagare se sono max/min relativi o punti di sella.

*Punti: 3+3+3, 3+2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 4, 6.*

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica, tema C

Compitino del 26 giugno 2008

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

**1.** Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

$$\text{(a)} \quad \log\Big(1 - \frac{x}{1-2x}\Big) \quad \text{di ordine 3,} \qquad \text{(b)} \quad \cos 2x \cos x \quad \text{di ordine 3,}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{3x^2}{1 - 3\,\mathrm{sen}^4\, x} \quad \text{di ordine 7.}$$

**2.** Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$\text{(a)} \quad \frac{2x-1}{4x^2+4x+2} \qquad \text{(b)} \quad \frac{\mathrm{sen}\, x - 2\cos x\, \mathrm{sen}\, x}{1+\cos^2 x} \qquad \text{(c)} \quad \sqrt{\frac{x-3}{5}}\,.$$

**3.** Calcolare, col metodo per parti ripetuto, una primitiva della funzione $e^{2x}(x - \cos x)$.

**4.** Mostrare che mediante la sostituzione $x = 2/(1-y)$ l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ diventa $\int (1-y)/\sqrt{1-y^2}\,dy$, e quindi calcolarli.

**5.** Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{2}{2n+1}\Big)^{n^2+1}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + e^{n+2}}{n^4 + 5n^3 + e^{n+2}}\,,$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n! \cdot 5^n \log 7}\,, \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(\frac{2 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n+1}}\Big)\,.$$

**6.** Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{n^2+3n+3}\,,$$

**a.** studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;

**b.** provare che la serie dei valori assoluti diverge.

**7.** Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2 - x - 2}$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

**8.** Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = 4y^4 + 8y^3 + 8y^2 - 4xy + 6y + x^2 - 3x + 2$. Indagare se sono max/min relativi o punti di sella.

*Punti: 3+3+3, 3+2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 4, 6.*

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica, tema D

Compitino del 26 giugno 2008

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

**1.** Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

$$\text{(a)}\quad \log\Big(1-\frac{2x}{1-x}\Big) \quad \text{di ordine 3,} \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \quad \text{di ordine 3,}$$

$$\text{(c)}\quad \frac{2x^3}{1-2\operatorname{sen}^4 x} \quad \text{di ordine 7.}$$

**2.** Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{x-1}{4x^2-4x+2} \qquad \text{(b)}\quad \frac{2\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} \qquad \text{(c)}\quad \sqrt{\frac{2x-4}{3}}\,.$$

**3.** Calcolare, col metodo per parti ripetuto, una primitiva della funzione $e^{2x}(x+\cos x)$.

**4.** Mostrare che mediante la sostituzione $x = 2/(1-y)$ l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x-1}}{x^2}\,dx$ diventa $\int (1+y)/\sqrt{1-y^2}\,dy$, e quindi calcolarli.

**5.** Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4}{3n+1}\Big)^{n^2+n}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+e^n}{3n^4+2n^2+e^{n+4}},$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!\cdot 3^n \log 3}, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(\frac{3-\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n+1}}\Big).$$

**6.** Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+3n+3},$$

**a.** studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;

**b.** provare che la serie dei valori assoluti diverge.

**7.** Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+x-2}$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

**8.** Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = 4y^4-8y^3+8y^2-4xy-6y+x^2+3x+2$. Indagare se sono max/min relativi o punti di sella.

*Punti: 3+3+3, 3+2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 4, 6.*