Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/2007

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica

Prova Scritta del 20 settembre 2007

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

**1.** Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x x(x+1) + 6\log\left(\sqrt{1-x}\right) + \sin 2x}{2(x+1)^{3/2} + 3x(x-1)(x+1) - 2\cos(x-x^2)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2^x \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{3^x+4^x} - 2^x \cdot \sqrt{x}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(x-1)x + 4\log(\cos x) + \cos(x)\sin x}{(x - e^x + \cos x)\log(1+x^2-x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-2}{(x^3-2x)\cos 3x}$.

**2.** Data la funzione $f(x) := \dfrac{2x^2-x-3}{x^2-2x}$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, mostrando che si annulla in un solo punto, gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di $f$.

**3.** Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\displaystyle\frac{e^{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \left(\frac{1+x}{x}\right)^2$, (b) $\displaystyle\frac{18x^2+6x-3}{9x^2+3x-2}$, (c) $(1-e^x)\operatorname{sen} 2x$.

**4.** Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{x\sqrt{2x-1}}$, per esempio usando la sostituzione $x = 1/(1-y)$.

**5.** Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(2n)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+n^4}{n(n^5+3)}$.

**6.** Dimostrare per induzione che

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{3}{n}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

*Punti: 4+3+4+3, 1+2+2+2+3+2, 3+4+4, 6, 3+3+3, 6.*