Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/2007

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 5 settembre 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(x-1) - 2x\sqrt{x+1} + \cos(x^2)}{(1-2x)^2 + 3x \operatorname{arcsen} x - 4e^{-x}\cos 2x + 3\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x - x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\sqrt{3x^2+2x} - \sqrt{x}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2\ln(x+1) + (2x^2-2x)e^x + \operatorname{sen} 2x}{(e^{2x}-1)(x - e^x + \cos x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(3+x) - \log(2-x)}{\log(1-x) - \log(1+x)}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^3}{5x^2+2x-3}$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** gli zeri e il segno; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\sqrt{2x-1} - \dfrac{\cos x}{1+2\operatorname{sen}^2 x}$, (b) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x-2}$, (c) $(x-1)\arctan x$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+2)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\Big)$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \operatorname{sen}(n\pi)}{n\ln(1+e^n)}$.

5. Studiare i punti stazionari della funzione di due variabili $f(x,y) := y^4 + 3y^3 + 2y^2 + xy + y + x^2 + 2x + 1$.

6. Dimostrare per induzione che

$$\frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \cdots + \frac{n^2}{2^n} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}.$$

Calcolare di conseguenza la somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2/2^k$.

Punti: 4+3+4+3, 1+2+2+2+2+2, 3+4+4, 3+3+3, 6, 6.