Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/2007

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 16 luglio 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3-2x+5)-\log(3x^2+1)}{x(1+x)^{1/x}-x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{1-\sqrt{x+1}}-2\cos 2x+\log(1-3x)}{\operatorname{sen}(x^2+3x)\cos(x(x-1))}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{16(1-x)^{3/2}-16e^{-x}+5x(x+1)-3(x^2-x)\cos x}{x^2(x+1)-(x^4+1)^2\arctan(x^2)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{(x-2)^2}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2+x+1}{x+1} + \log|1-x^2|$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(e)** mostrare che la funzione si annulla in esattamente due punti; **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{\log x}{x\sqrt{2+\log^2 x}}$, (b) $(x-1)\arctan x$, (c) $\dfrac{x^2-x+2}{2x^2+x-1}$.

4. Calcolare una primitiva della funzione $\dfrac{x+2}{x^2\sqrt{1+x-x^2}}$, per esempio usando la sostituzione $x = 1/(1-t)$.

5. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(1-\frac{3}{n}\Big)^{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3}-1)^{n-1}}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n-3}{n^3+2n^2+n+1}$.

6. Siano $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tali che $x_1+x_2+\cdots+x_n = n$. Dimostrare che $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n} \geq n$. Suggerimenti: si assuma la tesi vera per un n; presi $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n+1} = n+1$, si può supporre (?) che $x_1 > 1$ e $x_2 < 1$. Porre $y = x_1+x_2-1$ e applicare l'ipotesi induttiva a $y+x_3+\cdots+x_{n+1} = n$. Usare il fatto che $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1-\frac{1}{y} = (x_1-1)(1-x_2)(y+1)/(x_1x_2y) > 0$, da cui $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1 > \frac{1}{y}$.

Punti: 3+3+4+3, 1+2+2+2+3+2, 3+4+4, 6, 3+3+3, 8.