Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 20 settembre 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+(1-x)\operatorname{sen} x - e^x\sqrt{\cos x}}{x(-1+\cos(x^2))}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x} - \ln(1+x-x^2)}{\operatorname{sen}(2x-x^2) - 2e^{-x}\tan x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^4 + n^2 \operatorname{sen}\frac{1}{n}} - \sqrt{n^4 + n^2\cos\frac{1}{n}}\right)$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \sqrt{x^2+x}}{(x^2-x)(\cos(2\pi x)-1)}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{1-x} + \ln\left|\dfrac{x-1}{2}\right|$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale. **(d)** Si mostri che la funzione si annulla in esattamente due punti, uno dei quali è -1; **(e)** Si studi la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}$, (b) $(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x$, (c) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+4x+3}$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-n}{n!+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+3}{(n+1)^3}$.

5. Studiare l'insieme di definizione e gli insiemi di livello della funzione di due variabili $f(x,y) := x - \sqrt{4x^2+3y^2}$.

6. Sia a_n una successione di numeri reali, e poniamo $b_n := a_n + a_{n+1} - 2a_{n+2}$. Dimostrare (per esempio per induzione) che per ogni n vale la formula $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 + 2a_2 - a_{n+1} - 2a_{n+2}$. Calcolare di conseguenza la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right).$$

Punti: 3+3+3+3, 1+2+2+3+2+2, 3+4+4, 3+3+3, 6, 6.