Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 luglio 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(x+1) - (1+e^x)\operatorname{sen} x}{x \arccos(1-x^2)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos 2x - \sqrt{1-\cos x}}{e^{-2x^2}-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x\ln(x+x^2)} - \sqrt{x^2 + x\ln(x+2x^2)}\right)$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{3n})^n}{\pi - \arctan(n+\frac{1}{n})}$.

2. Data la funzione $f(x) := \ln\left|\dfrac{x-2}{3x^2+8x+8}\right|$ si studino **(a)** il dominio di definizione; **(b)** il segno; **(c)** i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti; **(d)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(e)** la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi. **(f)** Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{\arctan 2x}{1+4x^2}$, (b) $xe^x \cos x$, (c) $\dfrac{2x^2+2x-1}{x^2-2x+2}$.

4. Calcolare una primitiva della funzione $\dfrac{3x+2}{2x^2\sqrt{3x+1}}$, per esempio usando la sostituzione $x = 1/t$.

5. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2 2^n}{n3^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2n}$.

6. Definiamo la funzione $f(x) := 4x(1-x)$, e le sue iterate $g_1(x) := f(x)$, $g_2(x) := f(f(x))$, $g_n(x) := f(g_{n-1}(x))$. **(a)** Dimostrare che ognuna delle g_n verifica le ipotesi del teorema di Rolle in [0,1]. **(b)** Mostrare che $g_n'(x) = 4(1-2g_{n-1}(x))g_{n-1}'(x)$ quando $n > 1$. **(c)** Dimostrare per induzione che in ogni punto x in cui $g_n'(x) = 0$, necessariamente $g_n(x)$ vale o 0 o 1. **(d)** se x_1 e x_2 sono punti distinti in cui g_n' si annulla, allora g_n vale 1/2 in almeno un punto intermedio fra x_1 e x_2. **(e)** Dove g_n vale 1/2, la g_{n+1}' si annulla. **(f)** Dove g_n' si annulla, anche g_{n+1}' si annulla. **(g)** Dimostrare (per induzione) che g_n' si annulla in almeno $2n+1$ punti distinti.

Punti: 3+3+3+3, 1+2+2+2+3+2, 3+4+4, 6, 3+3, 8.