Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 4 aprile 2006

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (x - x^2)\cos 2x - \tan x}{2\operatorname{sen} x - 2(\cos x)\operatorname{sen}^2 x - \log(1+2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - x)^2 + 2(e^{-x} - 1)\cos x + \operatorname{sen} 2x}{2(1+x^2)\arctan x + \log(1-2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4 - 4\cos(xe^x) - x\operatorname{sen} 2x}{1 - x^2 + (1+x)\log(1+x) - \sqrt{1+2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(1 - e^{2x}) + x\sqrt{1 + \log(1+x)}}{\sqrt{1 + 2x^2 + x^3} - \sqrt{1 - x^2 + 2x^3}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + \log(x+1)} - 2x}{e^{\arctan x + \log x} - 4}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3x^2 + x - 1)^2 - \arccos(2x^2 - 1)}{\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{2x + \cos x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-1)e^{-x} + \sqrt{x + \cos x}}{\arctan x + \arctan(2x + x^2)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{9x^2 + 4x + 4}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{4 - 3x}{4 + x} + \log(4 + 4x + x^2)$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente tre punti; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Sia $f\colon [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[x_0 - h, x_0 + h]$, e derivabile due volte su $]x_0 - h, x_0 + h[$. Dimostrare che esiste un $c \in \,]x_0 - h, x_0 + h[$ tale che

$$f''(c) = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}\,.$$

(Posto $F(t) := f(x_0 + t) + f(x_0 - t)$ e $G(t) := t^2$, applicare il teorema del valor medio di Cauchy a $(F(h) - F(0))/(G(h) - G(0))\ldots$)

Punti: 4+3+4+2+2+2+2, 7, 9, 7.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 4 aprile 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 2(x+x^2)\cos x + \tan 2x}{2\log(1-2x) + 4\operatorname{sen} x + (\cos x)\operatorname{sen}^2 2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\log(1+2x)} - \operatorname{arcsen}(1-e^x)}{\sqrt{1+2x^2+x^3} - \sqrt{1+x^2+2x^3}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2\cos x - \operatorname{sen}(xe^x)}{8 - 3x^2 + (4-4x)\log(1-x) - 8\sqrt{1-x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x)^2 + (1-e^{2x})\cos x + \operatorname{sen} 2x}{2(1+x^2)\arctan x + \log(1-2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+\log(x+2)} - 3x}{1 - e^{\arctan x + \log x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(1+x) - \sqrt{x+\cos 2x}}{\arctan x + \arctan(x-2x^2)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-3x+1)^2 - \arccos(x^2-1)}{\sqrt{2x+\cos x} - \sqrt{3x+\cos x}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{8x^2+3x+2}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{4+3x}{4-x} + \log(4-4x+x^2)$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente tre punti; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Sia $f\colon [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[x_0-h, x_0+h]$, e derivabile due volte su $]x_0-h, x_0+h[$. Dimostrare che esiste un $c \in\,]x_0-h, x_0+h[$ tale che

$$f''(c) = \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

(Posto $F(t) := f(x_0+t) + f(x_0-t)$ e $G(t) := t^2$, applicare il teorema del valor medio di Cauchy a $(F(h)-F(0))/(G(h)-G(0))\ldots$)

Punti: 4+2+4+3+2+2+2, 7, 9, 7.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 4 aprile 2006

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+(3x-x^2)\cos 2x - 3\tan x}{2\operatorname{sen} x - \log(1+2x) - 2(\cos 2x)\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - x^2\cos x - \operatorname{sen}(xe^{-x})}{8-3x^2+(4+4x)\log(1+x) - 8\sqrt{1+x}}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x^2-x)^2 - 3(e^x-1)\cos x + \operatorname{sen} 3x}{(1+x^2)\arctan x + \log(1-x)}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(1-e^{-x}) + x\sqrt{1-\log(1+x)}}{\sqrt{1+x^2-x^3} - \sqrt{1+3x^2+2x^3}}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-\log(x+1)} - 2x}{e^{\log x - \arctan x} + 3}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x-2)e^{2x} + 2\sqrt{x+\cos x}}{\arctan 2x + \arctan(x+x^2)}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arccos(x^2-1) - (x^2-2x+2)^2}{\sqrt{x+\cos x} - \sqrt{4x+\cos x}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-x}{9x^2-4x+4}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{3x-4}{4+x} - \log(4+4x+x^2)$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente tre punti; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Sia $f\colon [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[x_0-h, x_0+h]$, e derivabile due volte su $]x_0-h, x_0+h[$. Dimostrare che esiste un $c \in\,]x_0-h, x_0+h[$ tale che
$$f''(c) = \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\,.$$
(Posto $F(t) := f(x_0+t)+f(x_0-t)$ e $G(t) := t^2$, applicare il teorema del valor medio di Cauchy a $(F(h)-F(0))/(G(h)-G(0))\dots$)

Punti: 4+4+3+2+2+2+2, 7, 9, 7.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 4 aprile 2006

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(xe^{-x})-x\operatorname{sen}x}{3x^2-2-(1-2x)\log(1-2x)+2\sqrt{1-2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x)^2+3(e^{-x}-1)\cos x+\operatorname{sen}3x}{\log(1+x)-(1+x^2)\arctan x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\log(1+x)}-\operatorname{arcsen}(1-e^x)}{\sqrt{1+x^2+3x^3}-\sqrt{1+2x^2-x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+(6x-4x^2)\cos x-3\tan 2x}{6\log(1-x)+3(\cos x)\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}3x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^2-x+1)^2-\arccos(x^2-1)}{\sqrt{x+2\cos x}-\sqrt{3x+2\cos x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)e^x-\sqrt{2x+\cos x}}{\arctan x+\arctan(x+2x^2)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+\log(x+3)}-2x}{e^{\arctan x+\log x}+1}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{8x^2-3x+2}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=\dfrac{4+3x}{x-4}-\log(4-4x+x^2)$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente tre punti; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Siano $x_0\in\mathbb{R}$, $h>0$. Sia $f\colon[x_0-h,x_0+h]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[x_0-h,x_0+h]$, e derivabile due volte su $]x_0-h,x_0+h[$. Dimostrare che esiste un $c\in\,]x_0-h,x_0+h[$ tale che

$$f''(c)=\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\,.$$

(Posto $F(t):=f(x_0+t)+f(x_0-t)$ e $G(t):=t^2$, applicare il teorema del valor medio di Cauchy a $(F(h)-F(0))/(G(h)-G(0))\ldots$)

Punti: 4+3+2+4+2+2+2, 7, 9, 7.