Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta dell'8 luglio 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{arcsen} x - 2x\cos x}{-6x + 8\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - 1 + \sqrt{1+2x} + 3\log(1-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 - x}}{\log(x + e^{2x})}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n}$.

2. Data la funzione $f(x) := x + \log\left|\dfrac{x-3}{3x+3}\right|$ si studi

a. il dominio di definizione e le eventuali simmetrie;
b. i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale;
d. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.
e. Si mostri che f si annulla in esattamente tre punti.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni (per l'ultima si può sostituire $t = \tan x$, ricordando che $\operatorname{sen}^2 x = (\tan^2 x)/(1 + \tan^2 x)$)

(a) $3 - 2^x + \sqrt{2x+1}$, (b) $x\ln(1+x)$, (c) $\dfrac{1}{4 + 10\operatorname{sen}^4 x - 13\operatorname{sen}^2 x}$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{2^{3n+1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 3n^3 + \log^2 n}{(n^2+2n)^3}$.

5. Dimostrare per induzione che

$$\frac{2\cdot 2}{3} + \frac{1\cdot 2^2}{3^2} + \frac{0\cdot 2^3}{3^3} + \frac{-1\cdot 2^4}{3^4} + \cdots + \frac{(3-n)\cdot 2^n}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(3-k)\cdot 2^k}{3^k} = \frac{n2^{n+1}}{3^n}.$$

Punti: 3+3+3+3, 1+2+2+2+3+2, 3+3+6, 3+3, 6.