Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 7 aprile 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^2 - \sqrt{2-\cos x} + \operatorname{sen}\log(1-x)}{\sqrt{4-x^3} - \sqrt{4-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x+1} - 2x - e^{-x} + 1}{x + x\cos x - 2\operatorname{sen} x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 - e^x\cos x + 3\tan x}{x\log(1+x) - e^x + 1 + \operatorname{sen} x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{(x-4)^2 - x}}{\log(1-x^3)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2e^x - 2\cos(x-x^2)}{7x - 3e^x - 2\operatorname{sen}(1-e^{-x}) - 4\sqrt{x+1} + 7}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x\arctan x - \log(x^2+2)}{\log(e^{-2x} + e^{-x})}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\arctan(e^{-x} - e^x) - \sqrt{x^2+4} + 2\log\cos 2x}{\pi - 2\arccos\log(x+1)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = -x + \log(1+2x+2x^2) + \arctan\dfrac{1}{x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente due punti, uno a sinistra e uno a destra di 0; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile, tale che f' sia pure continua, e supponiamo che $f(\frac{a+b}{2}) \geq \max\{f(a), f(b)\}$. Definiamo una successione di intervalli I_n in questo modo: poniamo $I_0 := [a,b]$; una volta definito $I_n = [a_n, b_n]$ lo dividiamo in quattro parti uguali $[a_n, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3], [c_3, b_n]$ e poniamo I_{n+1} uguale a $[a_n, c_2]$ o $[c_1, c_3]$ o $[c_2, b_n]$ a seconda di quale fra i valori $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ sia rispettivamente più grande (in caso di valori uguali la scelta è indifferente). Dimostrare **a**) che $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, **b**) che $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq \max\{f(a_n), f(b_n)\}$, **c**) che in ognuno degli I_n esiste almeno un punto in cui $f' \geq 0$ e uno in cui $f' \leq 0$ (usare Lagrange nelle due metà di I_n), **d**) che esiste un $\bar{x}$ che appartiene a tutti gli I_n contemporaneamente, e infine **e**) che $f'(\bar{x}) = 0$.

Punti: 2+4+3+2+4+2+2, 7, 9, 9.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 7 aprile 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2 - e^{-x}\cos x - 3\tan x}{1-\cos x + x\log(1+x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+2x-e^x - x\sqrt{1-x}}{x-\tan x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x\arctan x - \log(1+2x^2)}{\log(e^{-2x}+e^{-x})}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^3-1)^2 - \sqrt{2-\cos 2x} + \operatorname{sen}\log(1+x)}{\sqrt{3x^3+4}-\sqrt{x^2+4}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{(x-9)^2+x}}{\log(1-x^3)}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2e^{-x}-2\cos(x^2+x)}{7x-3e^x-2\operatorname{sen}(1-e^{-x})+7-4\sqrt{x+1}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2+2\arctan(e^{-x}-e^x)+2\log(1+\operatorname{sen} x)-\sqrt{4-x^2}}{\pi - 2\arccos\log(1-x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = x + \log(1-2x+2x^2) - \arctan\dfrac{1}{x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente due punti, uno a sinistra e uno a destra di 0; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile, tale che f' sia pure continua, e supponiamo che $f(\frac{a+b}{2}) \geq \max\{f(a), f(b)\}$. Definiamo una successione di intervalli I_n in questo modo: poniamo $I_0 := [a,b]$; una volta definito $I_n = [a_n, b_n]$ lo dividiamo in quattro parti uguali $[a_n, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3], [c_3, b_n]$ e poniamo I_{n+1} uguale a $[a_n, c_2]$ o $[c_1, c_3]$ o $[c_2, b_n]$ a seconda di quale fra i valori $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ sia rispettivamente più grande (in caso di valori uguali la scelta è indifferente). Dimostrare **a**) che $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, **b**) che $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq \max\{f(a_n), f(b_n)\}$, **c**) che in ognuno degli I_n esiste almeno un punto in cui $f' \geq 0$ e uno in cui $f' \leq 0$ (usare Lagrange nelle due metà di I_n), **d**) che esiste un $\bar{x}$ che appartiene a tutti gli I_n contemporaneamente, e infine **e**) che $f'(\bar{x}) = 0$.

Punti: 3+4+2+2+2+4+2, 7, 9, 9.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 7 aprile 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\sqrt{x+(x-4)^2}}{\log(1-2x^3)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)^3+\operatorname{sen}\log(1-x)+\sqrt{3-2\cos x}}{\sqrt{x^4+4}-\sqrt{x^2+4}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x\sqrt{x+1}-6x-e^{-2x}+1}{x-(\cos x)\operatorname{sen} x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2e^x-2\cos(x-x^2)}{2x-e^x+2-\sqrt{2x+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2\log(x^2+2)-x\arctan x}{\log(e^{-2x}+e^{-x})}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^2-e^x\cos x-3\tan x}{3x\log(1-x)-e^{-2x}-2e^x+3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(e^{-x}-e^x)+1+\log\cos x-\sqrt{2x^2+1}}{\pi-2\arccos\log(1+2x)}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=x-\log(1+2x+2x^2)-\arctan\dfrac{1}{x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente due punti, uno a sinistra e uno a destra di 0; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile, tale che f' sia pure continua, e supponiamo che $f(\frac{a+b}{2})\geq\max\{f(a),f(b)\}$. Definiamo una successione di intervalli I_n in questo modo: poniamo $I_0:=[a,b]$; una volta definito $I_n=[a_n,b_n]$ lo dividiamo in quattro parti uguali $[a_n,c_1],[c_1,c_2],[c_2,c_3],[c_3,b_n]$ e poniamo I_{n+1} uguale a $[a_n,c_2]$ o $[c_1,c_3]$ o $[c_2,b_n]$ a seconda di quale fra i valori $f(c_1),f(c_2),f(c_3)$ sia rispettivamente più grande (in caso di valori uguali la scelta è indifferente). Dimostrare **a**) che $I_0\supset I_1\supset I_2\supset\ldots$, **b**) che $f(\frac{a_n+b_n}{2})\geq\max\{f(a_n),f(b_n)\}$, **c**) che in ognuno degli I_n esiste almeno un punto in cui $f'\geq 0$ e uno in cui $f'\leq 0$ (usare Lagrange nelle due metà di I_n), **d**) che esiste un $\bar{x}$ che appartiene a tutti gli I_n contemporaneamente, e infine **e**) che $f'(\bar{x})=0$.

Punti: 2+2+4+4+2+3+2, 7, 9, 9.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 7 aprile 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2x^2e^x-\cos(2x-x^2)}{1-3\operatorname{sen}(1-e^x)-2e^x+\sqrt{1-2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(2x^2-1)-3x\arctan x}{\log(e^{-2x}+e^{-x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x-\sqrt{(x-4)^2-2x}}{\log(1-2x^3)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-e^x\cos 2x-\tan x}{3x\log(1-2x)-2e^{-x}-e^{2x}+3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)^3+\operatorname{sen}\log(1-x)+\sqrt{3-2\cos x}}{\sqrt{3x^4+1}-\sqrt{2x^2+1}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+6x-e^{2x}-4x\sqrt{1-x}}{x-\arctan x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\arctan(e^{-x}-e^x)+\log\cos x-\sqrt{1-2x^2}}{\pi-2\arccos\log(1+x)}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{-x^2+4x-3}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** il segno della f; **d)** f' e gli intervalli di crescenza/decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità di f. **f)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=x+\log(1-2x+2x^2)-\arctan\dfrac{1}{x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente due punti, uno a sinistra e uno a destra di 0; **e)** g'' e la convessità/concavità. **f)** tracciare un grafico di g.

4. Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile, tale che f' sia pure continua, e supponiamo che $f(\frac{a+b}{2})\geq\max\{f(a),f(b)\}$. Definiamo una successione di intervalli I_n in questo modo: poniamo $I_0:=[a,b]$; una volta definito $I_n=[a_n,b_n]$ lo dividiamo in quattro parti uguali $[a_n,c_1],[c_1,c_2],[c_2,c_3],[c_3,b_n]$ e poniamo I_{n+1} uguale a $[a_n,c_2]$ o $[c_1,c_3]$ o $[c_2,b_n]$ a seconda di quale fra i valori $f(c_1),f(c_2),f(c_3)$ sia rispettivamente più grande (in caso di valori uguali la scelta è indifferente). Dimostrare **a)** che $I_0\supset I_1\supset I_2\supset\ldots$, **b)** che $f(\frac{a_n+b_n}{2})\geq\max\{f(a_n),f(b_n)\}$, **c)** che in ognuno degli I_n esiste almeno un punto in cui $f'\geq 0$ e uno in cui $f'\leq 0$ (usare Lagrange nelle due metà di I_n), **d)** che esiste un $\bar{x}$ che appartiene a tutti gli I_n contemporaneamente, e infine **e)** che $f'(\bar{x})=0$.

Punti: 4+2+2+3+2+4+2, 7, 9, 9.