Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 21 luglio 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}+x\cos 2x+\operatorname{sen}(x+x^2)}{\arctan(x^3-x^2)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x\ln(1-x) - e^{x-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x - \arctan x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x^2)-\ln(x^2-2x+1)-\cos(\pi x)}{(x^2-x)e^{\operatorname{sen} x}}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\right)^{n+1}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{3x^2+1}{x(x^2+3)}$ si studi

a. il dominio di definizione e le eventuali simmetrie;
b. i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle funzioni

(a) $\dfrac{3x^2+1}{x^3+3x}$, (b) $(3x^2+1)\ln(1+x)$, (c) $\dfrac{e^x+1}{2+3e^{2x}}$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n-5n^3+\cos(n\pi)}{3^n+\sqrt{n}+4\ln n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n+3}-\sqrt{n^3+n+2}\right)$.

5. Data la funzione $f(x) := \sqrt{1-2x}$, indichiamo con $f^{(n)}(x)$ la sua derivata n-esima.

a. Dimostrare per induzione che $f^{(n+1)}(x) = (2n-1)f^{(n)}(x)/(1-2x)$ per ogni $n \geq 0$.
b. Dimostrare per induzione che $f^{(n)}(x) = -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)/(1-2x)^{(2n-1)/2}$ se $n \geq 2$.
c. Scrivere il polinomio di MacLaurin di f di ordine 5.

Punti: 3+3+3+3, 2+2+1+2+3+2, 3+3+3, 3+3, 3+3+3.

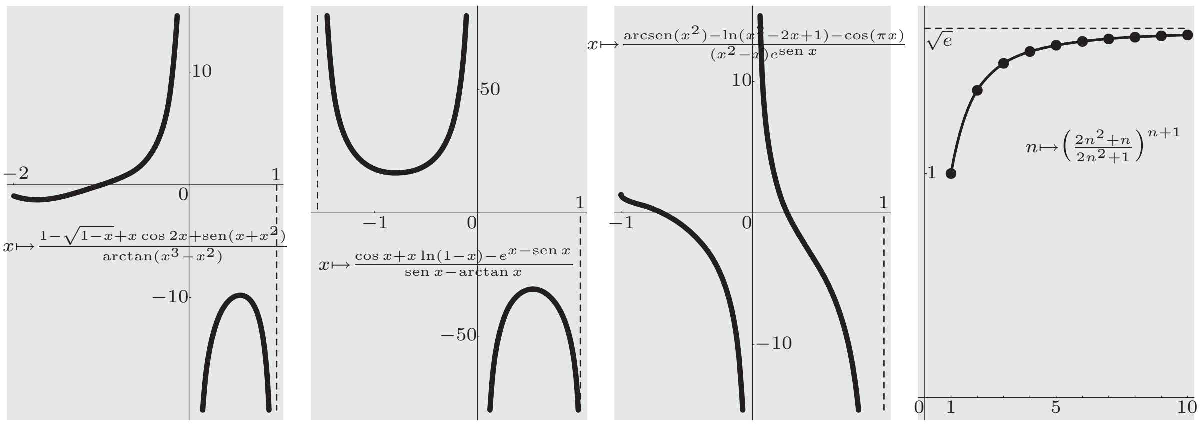
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 21 luglio 2004

Svolgimento



1. a. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando la regola de l'Hôpital si arriva alla forma non indeterminata $(5/2)/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}+x\cos 2x+\operatorname{sen}(x+x^2)}{\arctan(x^3-x^2)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1)+\cos 2x + x(-2\operatorname{sen} 2x)+(1+2x)\cos(x+x^2)}{\frac{1}{1+(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1+0+1}{0} = \pm\infty\,.$$

Per trovare il segno dell'infinito finale raccogliamo x al denominatore:

$$\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1)+\cos 2x + x(-2\operatorname{sen} 2x)+(1+2x)\cos(x+x^2)}{\frac{1}{1+(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1)+\cos 2x + x(-2\operatorname{sen} 2x)+(1+2x)\cos(x+x^2)}{\frac{3x-2}{1+(x^3-x^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left(\text{qualcosa che tende a } \tfrac{5/2}{-2}\right).$$

Quindi i limiti sinistro e destro sono infiniti di segno opposto:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1)+\cos 2x + x(-2\operatorname{sen} 2x)+(1+2x)\cos(x+x^2)}{\frac{3x-2}{1+(x^3-x^2)^2}} \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{per } x\to 0^+,\\ +\infty & \text{per } x\to 0^-.\end{cases}$$

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando la regola de l'Hôpital si riottiene $0/0$ e quindi la si applica una seconda volta, arrivando a una forma non indeterminata:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x\ln(1-x) - e^{x-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x - \arctan x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x + \ln(1-x) + x\frac{1}{1-x}(-1) - (1-\cos x)e^{x-\operatorname{sen} x}}{\cos x - \frac{1}{1+x^2}} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\begin{pmatrix} -\cos x + \frac{1}{1-x}(-1) + \frac{1}{1-x}(-1) + x(-1)(1-x)^{-2}(-1)(-1) - \\ -(\operatorname{sen} x)e^{x-\operatorname{sen} x} - (1-\cos x)^2 e^{x-\operatorname{sen} x}\end{pmatrix}}{-\operatorname{sen} x - (-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - \frac{2}{1-x} - x(1-x)^{-2} - (\operatorname{sen} x)e^{x-\operatorname{sen} x} - (1-\cos x)^2 e^{x-\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{sen} x + 2x(1+x^2)^{-2}} = \\
&= \frac{-1-2-0-0-0}{0} = \pm\infty\,.
\end{aligned}
$$

Per stabilire il segno dell'infinito, raccogliamo x al denominatore:

$$
\begin{aligned}
&\frac{-\cos x - \frac{2}{1-x} - x(1-x)^{-2} - (\operatorname{sen} x)e^{x-\operatorname{sen} x} - (1-\cos x)^2 e^{x-\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{sen} x + 2x(1+x^2)^{-2}} = \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{-\cos x - \frac{2}{1-x} - x(1-x)^{-2} - (\operatorname{sen} x)e^{x-\operatorname{sen} x} - (1-\cos x)^2 e^{x-\operatorname{sen} x}}{-\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2(1+x^2)^{-2}} = \\
&= \frac{1}{x}\cdot\big(\text{qualcosa che tende a } \tfrac{-3}{-1+2}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Quindi i limiti sinistro e destro sono infiniti di segno opposto:

$$
\frac{1}{x}\cdot\frac{-\cos x - \frac{2}{1-x} - x(1-x)^{-2} - (\operatorname{sen} x)e^{x-\operatorname{sen} x} - (1-\cos x)^2 e^{x-\operatorname{sen} x}}{-\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2(1+x^2)^{-2}} \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{per } x\to 0^+, \\ +\infty & \text{per } x\to 0^-. \end{cases}
$$

c. Il limite si presenta nella forma *non* indeterminata $-1/0$. Per stabilire il segno dell'infinito raccogliamo x al denominatore:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{arcsen}(x^2) - \ln(x^2-2x+1) - \cos(\pi x)}{(x^2-x)e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{arcsen}(x^2) - \ln(x^2-2x+1) - \cos(\pi x)}{(x-1)e^{\operatorname{sen} x}} = \\
&= \frac{1}{x}\cdot\big(\text{qualcosa che tende a } \tfrac{-1}{-1}\big).
\end{aligned}
$$

Quindi i limiti sinistro e destro sono infiniti di segno opposto:

$$
\frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{arcsen}(x^2) - \ln(x^2-2x+1) - \cos(\pi x)}{(x-1)e^{\operatorname{sen} x}} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{per } x\to 0^+, \\ -\infty & \text{per } x\to 0^-. \end{cases}
$$

d. Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Prendendo il logaritmo ci riportiamo alla più familiare forma $\infty \cdot 0 = 0/0$, a cui si può applicare la regola dell'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \ln\Bigl(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\Bigr)^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\frac{2n^2+n}{2n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{2n^2+n}{2n^2+1}}{\frac{1}{n+1}} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\cdot\frac{(4n+1)(2n^2+1)-(2n^2+n)4n}{(2n^2+1)^2}}{-\frac{1}{(n+1)^2}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\cdot\frac{8n^3+4n+2n^2+1-8n^3-4n^2}{(2n^2+1)^2}\cdot\bigl(-(n+1)^2\bigr) = \\
&= -\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\cdot\frac{-2n^2+4n+1}{(2n^2+1)^2}\cdot(n+1)^2 = \\
&= -\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\cdot\frac{-2n^2+4n+1}{2n^2+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{2n^2+1} = \\
&= -\frac{2}{2}\cdot\frac{-2}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Tornando al limite originale:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\Bigr)^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\exp\biggl(\ln\Bigl(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\Bigr)^{n+1}\biggr) = \\
&= \exp\biggl(\lim_{n\to+\infty}\ln\Bigl(\frac{2n^2+n}{2n^2+1}\Bigr)^{n+1}\biggr) = \exp\frac{1}{2} = e^{1/2} = \sqrt{e}\,.
\end{aligned}$$

2. a. La funzione

$$f(x) := \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)}$$

è definita per gli x per i quali il denominatore è $\neq 0$, cioè per gli $x \neq 0$. In altre parole, il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si vede che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x, e quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine. La funzione è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue nel loro dominio.

b. I comportamenti al limite da studiare sono per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 0^\pm$. Tutti facili:

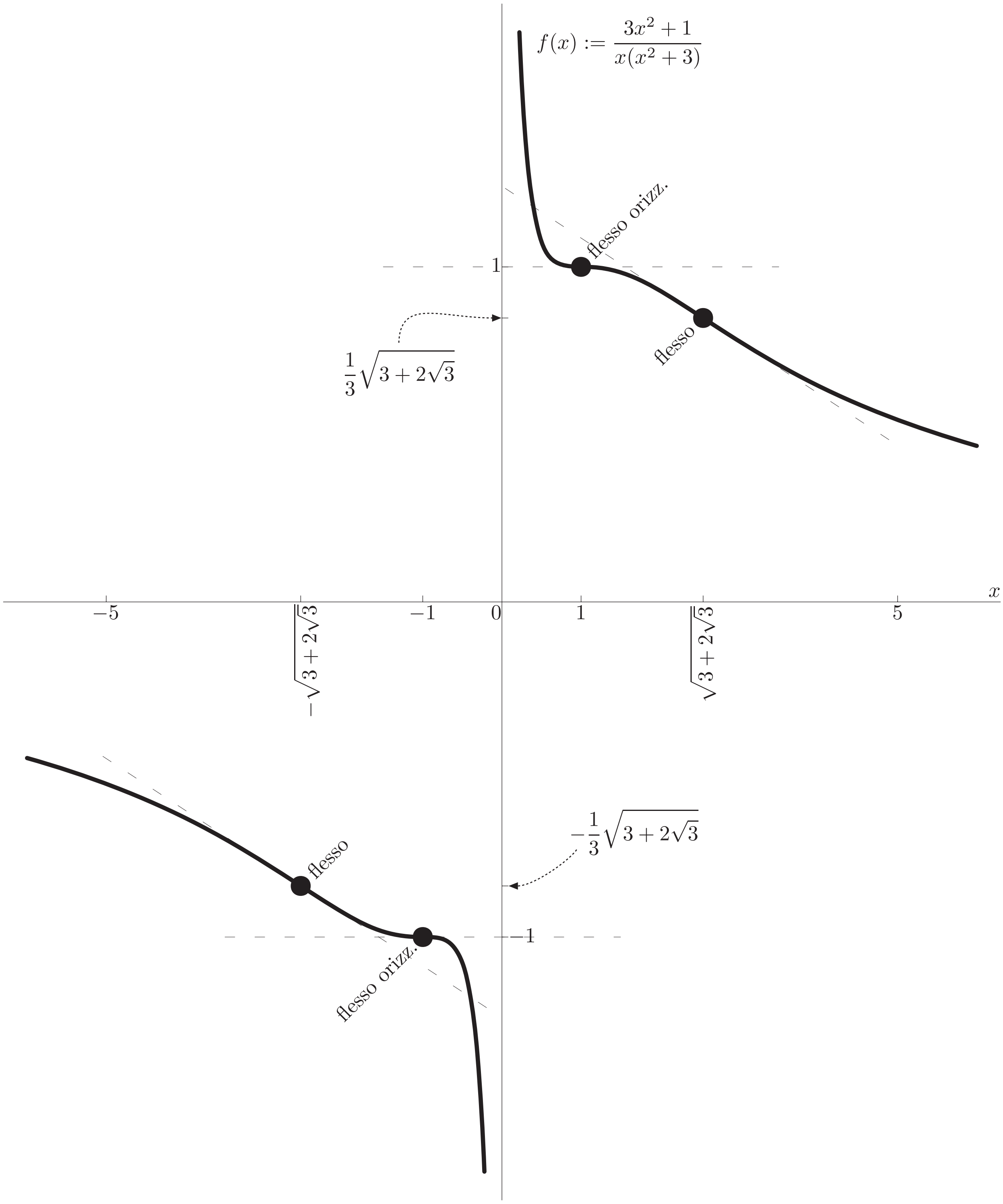
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+1}{x(x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{3+1/x^2}{1+3/x^2} = 0^\pm\cdot\frac{3+0}{1+0} = 0^\pm\,,\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2+1}{x^2+3}(+\infty)\cdot\frac{1}{3} = +\infty\,,\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2+1}{x^2+3}(-\infty)\cdot\frac{1}{3} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Pertanto l'asse x e l'asse y sono asintoti del grafico della funzione. Avendo già l'asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$ è inutile cercarne di obliqui.

c. I fattori $3x^2+1$ e x^2+3 sono sempre > 0. Quindi il segno di $f(x)$ per $x \neq 0$ coincide col segno del fattore restante x. In altre parole, $f(x) > 0$ per $x > 0$, e $f(x) < 0$ per $x < 0$. La f non si annulla mai.

d. Calcoliamo la derivata prima, evidenziando un prodotto notevole al numeratore:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{6x(x(x^2+3)) - (3x^2+1)(3x^2+3)}{\bigl(x(x^2+3)\bigr)^2} = \frac{6x^4+18x^2-9x^4-9x^2-3x^2-3}{\bigl(x(x^2+3)\bigr)^2} = \\
&= \frac{-3x^4+6x^2-3}{\bigl(x(x^2+3)\bigr)^2} = -3\frac{x^4-2x^2+1}{\bigl(x(x^2+3)\bigr)^2} = -3\frac{(x^2-1)^2}{\bigl(x(x^2+3)\bigr)^2}\,.
\end{aligned}$$



La derivata prima si annulla quando $x^2 - 1 = 0$, cioè per $x = \pm 1$. Altrove sul dominio $f'(x) < 0$. Quindi f è strettamente decrescente sui due intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Nei due punti di ascissa ± 1 la tangente è orizzontale e la funzione passa da una parte all'altra della tangente. Quindi i punti di ascissa ± 1 sono dei flessi orizzontali, nel senso che il grafico passa da una parte all'altra della retta tangente (non c'è bisogno della derivata seconda in questi casi). Il valore di f nei due punti è

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{1 \cdot (1^2 + 3)} = 1\,, \qquad f(-1) = -f(1) = -1\,.$$

e. Calcoliamo la derivata seconda, badando a evidenziare i fattori comuni da raccogliere:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -3\frac{2(x^2-1)\cdot 2x \cdot \big(x(x^2+3)\big)^2 - (x^2-1)^2 \cdot 2x(x^2+3)\cdot(3x^2+3)}{(x(x^2+3))^4} = \\ &= -3(x^2-1)\frac{4x \cdot x(x^2+3) - (x^2-1)\cdot 2 \cdot (3x^2+3)}{(x(x^2+3))^3} = \\ &= -3(x^2-1)\frac{4x^4+12x^2-6(x^4-1)}{(x(x^2+3))^3} = -3(x^2-1)\frac{-2x^4+12x^2+6}{(x(x^2+3))^3} = \\ &= 6\frac{(x^2-1)(x^4-6x^2-3)}{(x(x^2+3))^3}\,. \end{aligned}$$

Il polinomio di quarto grado $x^4 - 6x^2 - 3$ è biquadratico, e si può scomporre introducendo la variabile ausiliaria $t := x^2$. Si ha $x^4 - 6x^2 - 3 = t^2 - 6t - 3$, le cui radici in t sono $t = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 \pm 2\sqrt{3}$, una positiva e l'altra negativa. Il polinomio si scompone così:

$$x^4 - 6x^2 - 3 = t^2 - 6t - 3 = \big(t - (3+2\sqrt{3})\big)\big(t - (3-2\sqrt{3})\big) = \big(x^2 - (3+2\sqrt{3})\big)\big(x^2 - 3 + 2\sqrt{3}\big)\,.$$

Il fattore $x^2 - 3 + 2\sqrt{3}$ è sempre > 0, perché $-3+2\sqrt{3} = -\sqrt{9} + \sqrt{12} > 0$. Il fattore $x^2 - (3+2\sqrt{3})$ si annulla per $x = \pm\sqrt{3+2\sqrt{3}} \approx \pm 2{,}54246$, è < 0 fra le due radici, ed è < 0 altrove. Nel segno di $f''(x)$ giocano solo i fattori $x^2 - 1$, $x^2 - (3+2\sqrt{3})$ e x^3. Dopo avere considerato tutti i casi si conclude che

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -\sqrt{3+2\sqrt{3}} \text{ o } -1 < x < 0 \text{ o } 1 < x < \sqrt{3+2\sqrt{3}}, \\ = 0 & \text{se } x = \pm 1 \text{ o } x = \pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}, \\ > 0 & \text{se } -\sqrt{3+2\sqrt{3}} < x < -1 \text{ o } 0 < x < 1 \text{ o } x > \sqrt{3+2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Intervalli di convessità sono $[-\sqrt{3+2\sqrt{3}}, -1]$, $]0,1]$ e $[\sqrt{3+2\sqrt{3}}, +\infty[$. Intervalli di concavità sono $\big]-\infty, -\sqrt{3+2\sqrt{3}}\big]$, $[-1, 0[$ e $\big[1, \sqrt{3+2\sqrt{3}}\big]$. Si conferma che i punti di ascissa ± 1 sono di flesso. Anche i punti di ascissa $\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ sono di flesso (obliquo). Non ce ne sono altri. Il valore di f nei nuovi punti di flesso è

$$\begin{aligned} f\Big(\sqrt{3+2\sqrt{3}}\Big) &= \frac{3(3+2\sqrt{3})+1}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}((3+2\sqrt{3})+3)} = \frac{10+6\sqrt{3}}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}(6+2\sqrt{3})} = \frac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}(3+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{(5+3\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{15-5\sqrt{3}+9\sqrt{3}-9}{6\sqrt{3+2\sqrt{3}}} = \frac{6+4\sqrt{3}}{6\sqrt{3+2\sqrt{3}}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3+2\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}} \approx 0{,}847487\,, \\ f\Big(-\sqrt{3+2\sqrt{3}}\Big) &= -f\Big(\sqrt{3+2\sqrt{3}}\Big) = -\frac{1}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}} \approx -0{,}847487\,. \end{aligned}$$

3. a. La funzione razionale $(3x^2+1)/(x^3+3x)$ si decompone in somma:

$$\frac{3x^2+1}{x^3+3x} = \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{Ax^2+3A+Bx^2+Cx}{x(x^2+3)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+3A}{x(x^2+3)}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} A+B = 3 \\ C = 0 \\ 3A = 1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 3 - 1/3 = 8/3 \\ C = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+1}{x^3+3x}dx &= \int\Big(\frac{1}{3x}+\frac{8x}{3(x^2+3)}\Big)dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{x}{x^2+3}dx = \\ &= \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x^2+3}D(x^2+3)dx = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x^2+3| = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln(x^2+3)\,.\end{aligned}$$

b. Proviamo a integrare per parti:

$$\begin{aligned}\int(3x^2+1)\ln(1+x)\,dx &= \int \ln(1+x)\cdot D(x^3+x)\,dx = (x^3+x)\ln(1+x) - \int D\big(\ln(1+x)\big)(x^3+x)dx = \\ &= (x^3+x)\ln(1+x) - \int \frac{1}{1+x}(x^3+x)dx = (x^3+x)\ln(1+x) - \int \frac{x^3+x}{1+x}\,dx = \\ &= (x^3+x)\ln(1+x) - \int \frac{x^3+x^2-(x^2+x)+2x+2-2}{1+x}\,dx = \\ &= (x^3+x)\ln(1+x) - \int \frac{x^2(x+1)-x(x+1)+2(x+1)-2}{x+1}\,dx = \\ &= (x^3+x)\ln(1+x) - \int\Big(x^2-x+2-\frac{2}{x+1}\Big)dx = \\ &= (x^3+x)\ln(1+x) - \Big(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x-2\ln(1+x)\Big) = \\ &= (x^3+x+2)\ln(1+x) - \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\,.\end{aligned}$$

c. Proviamo colla sostituzione $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = (1/t)dt$:

$$\int \frac{e^x+1}{2+3e^{2x}}\,dx = \int \frac{t+1}{2+3t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{t(2+3t^2)}\,dt\,.$$

Decomponiamo in somma:

$$\frac{t+1}{t(2+3t^2)} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{2+3t^2} = \frac{2A+3At^2+Bt^2+Ct}{t(2+3t^2)} = \frac{(3A+B)t^2+Ct+2A}{t(2+3t^2)}\,,$$

da cui

$$\begin{cases}3A+B=0\\ C=1\\ 2A=1\end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases}A=1/2\\ B=-3/2\\ C=1.\end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{t+1}{t(2+3t^2)}\,dt &= \int\Big(\frac{1}{2t}+\frac{\frac{3}{2}t+1}{2+3t^2}\Big)dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln t - \frac{3}{2}\int \frac{t}{2+3t^2}\,dt + \int \frac{1}{2+3t^2}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln t - \frac{3}{12}\int \frac{D(2+3t^2)}{2+3t^2}\,dt + \int \frac{1}{2(1+(t\sqrt{3/2})^2)}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\ln(2+3t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{1+(t\sqrt{3/2})^2}D\big(t\sqrt{3/2}\big)dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\ln(2+3t^2) + \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\big(t\sqrt{3/2}\big)\,.\end{aligned}$$

Tornando alle variabili di partenza:

$$\int \frac{e^x+1}{2+3e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(2+3e^{2x}) + \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\Big(e^x\sqrt{\frac{3}{2}}\Big)\,.$$

4. a. L'addendo generale della serie si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Raccogliamo a numeratore e denominatore i termini che vanno all'infinito più rapidamente, cioè in questo caso gli esponenziali:

$$\frac{e^n - 5n^3 + \cos(n\pi)}{3^n + \sqrt{n} + 4\ln n} =$$
$$= \frac{e^n(1 - 5\frac{n^3}{e^n} + \frac{\cos n\pi}{e^n})}{3^n(1 + \frac{\sqrt{n}}{3^n} + 4\frac{\ln n}{3^n})} =$$
$$= \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot \frac{1 - 5\frac{n^3}{e^n} + \frac{\cos n\pi}{e^n}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{3^n} + 4\frac{\ln n}{3^n}} =$$
$$= \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot (\text{qualcosa che tende a } 1)\,.$$

Notare che $\cos n\pi = (-1)^n$ non ha limite per $n \to +\infty$, però è compreso sempre fra -1 e 1, e quindi $0 \le |\frac{\cos n\pi}{e^n}| \le 1/e^n \to 0$. Gli esponenziali e^n e 3^n vanno all'infinito più rapidamente di potenze, radici e logaritmi. L'addendo generale quindi è asintoticamente equivalente a $(e/3)^n$, che è il termine generale di una serie geometrica convergente assolutamente, perché $0 < e/3 < 1$. Quindi anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - 5n^3 + \cos(n\pi)}{3^n + \sqrt{n} + 4\ln n}$$

converge assolutamente. Giacché $e/3 \approx 0{,}906094$ è piuttosto vicino a 1, la convergenza della serie è un po' lenta.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$a_n/(e/3)^n$
1	−0,82043	−0,82043	−0,90545749
2	−2,39717	−3,21759	−2,91978930
3	−3,49915	−6,71674	−4,70373010
4	−2,98607	−9,70281	−4,43003000
5	−1,89764	−11,60045	−3,10704950
6	−0,91464	−12,51509	−1,65277120
7	−0,28186	−12,79695	−0,56210886
8	0,06420	−12,73275	0,14131107
9	0,22631	−12,50644	0,54971861
10	0,28830	−12,21814	0,77288381
11	0,30040	−11,91774	0,88876872
12	0,28999	−11,62776	0,94689627
13	0,27060	−11,35716	0,97515954
14	0,24857	−11,10859	0,98858930
15	0,22665	−10,88194	0,99483657
16	0,20595	−10,67599	0,99769504
17	0,18685	−10,48914	0,99898286
18	0,16940	−10,31973	0,99955587
19	0,15354	−10,16620	0,99980783
20	0,13913	−10,02706	0,99991755
21	0,12607	−9,90099	0,99996489
22	0,11424	−9,78675	0,99998515
23	0,10351	−9,68324	0,99999376
24	0,09379	−9,58945	0,99999739
25	0,08498	−9,50447	0,99999891
26	0,07700	−9,42747	0,99999955
27	0,06977	−9,35770	0,99999982
28	0,06322	−9,29448	0,99999992
29	0,05728	−9,23720	0,99999997
30	0,05190	−9,18529	0,99999999

b. L'addendo generale $\sqrt{n^3+n+3} - \sqrt{n^3+n+2}$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Usiamo il classico trucco di moltiplicare e dividere per la somma delle radici:

$$\sqrt{n^3+n+3} - \sqrt{n^3+n+2} =$$
$$= \frac{\left(\begin{array}{l}\left(\sqrt{n^3+n+3} - \sqrt{n^3+n+2}\right) \cdot \\ \quad \cdot \left(\sqrt{n^3+n+3} + \sqrt{n^3+n+2}\right)\end{array}\right)}{\sqrt{n^3+n+3} + \sqrt{n^3+n+2}} =$$
$$= \frac{n^3+n+3-(n^3+n+2)}{\sqrt{n^3+n+3} + \sqrt{n^3+n+2}} =$$
$$= \frac{1}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} + n^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}} =$$
$$= \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}} =$$
$$= \frac{1}{n^{3/2}} \cdot (\text{qualcosa che tende a } 1/2)\,.$$

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$a_n/(1/(2n^{3/2}))$
1	0,23607	0,23607	0,47214
2	0,14145	0,37752	0,80016
3	0,08771	0,46523	0,91149
4	0,05955	0,52478	0,95279
5	0,04344	0,56821	0,97129
6	0,03337	0,60158	0,98089
7	0,02663	0,62821	0,98643
8	0,02187	0,65009	0,98990
9	0,01837	0,66846	0,99220
10	0,01571	0,68418	0,99381
11	0,01364	0,69781	0,99497
12	0,01198	0,70979	0,99583
13	0,01063	0,72042	0,99649
14	0,00952	0,72994	0,99701
15	0,00858	0,73852	0,99742

L'addendo generale è dunque asintoticamente equivalente a $1/(2n^{3/2})$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata assolutamente convergente, perché l'esponente $3/2$ è > 1. Quindi anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sqrt{n^3+n+3}-\sqrt{n^3+n+2}\Big)$$

converge assolutamente.

5. a. La derivata prima della funzione $f(x) := \sqrt{1-2x}$ è:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-2x)^{-1/2}\cdot(-2) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,.$$

La formula da dimostrare è

$$P(n): \qquad f^{(n+1)}(x) = (2n-1)\frac{f^{(n)}(x)}{(1-2x)}\,.$$

Per $n = 0$ diventa

$$P(0): \qquad f^{(1)}(x) = (2\cdot 0-1)\frac{f^{(0)}(x)}{1-2x}\,,$$

cioè

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{1-2x}\,, \qquad \text{cioè ancora} \qquad f'(x) = -\frac{\sqrt{1-2x}}{1-2x}\,,$$

che è vera, per quanto visto sopra. Supponiamo che $P(n)$ sia vera per un qualche $n \geq 0$. Derivando il primo membro $f^{(n+1)}(x)$ otteniamo $f^{(n+2)}(x)$. Derivando il secondo membro con la regola di derivazione del quoziente abbiamo

$$(2n-1)\frac{f^{(n+1)}(x)(1-2x)-f^{(n)}(x)\cdot(-2)}{(1-2x)^2}\,. \tag{$*$}$$

D'altra parte, estraendo $f^{(n)}(x)$ dalla $P(n)$, cioè da $f^{(n+1)}(x) = (2n-1)f^{(n)}(x)/(1-2x)$, si ricava $f^{(n)}(x) = (1-2x)f^{(n+1)}(x)/(2n-1)$. Sostituendo nella formula (*) si ricava

$$\begin{aligned}(2n-1)\frac{f^{(n+1)}(x)(1-2x)+2(1-2x)f^{(n+1)}(x)/(2n-1)}{(1-2x)^2} &= (2n-1)\frac{f^{(n+1)}(x)}{1-2x}+2\frac{f^{(n+1)}(x)}{1-2x} =\\ &= (2n+1)\frac{f^{(n+1)}(x)}{1-2x}\,.\end{aligned}$$

Quindi vale l'uguaglianza

$$f^{(n+2)}(x) = (2n+1)\frac{f^{(n+1)}(x)}{1-2x}\,.$$

Ma questa è proprio $P(n+1)$, come si vede sostituendo $n+1$ al posto di n in $P(n)$.

b. La formula da dimostrare è

$$Q(n): \qquad f^{(n)}(x) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(1-2x)^{(2n-1)/2}}$$

per $n \geq 2$. Vediamo se è vera per $n = 2$. La derivata seconda di f è

$$f''(x) = D\big(f'(x)\big) = D\Big(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\Big) = -D\big((1-2x)^{-1/2}\big) = -(-1/2)(1-2x)^{-3/2}(-2) = -\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,.$$

Ma questa è proprio $Q(n)$ con $n = 2$. Supponiamo che $Q(n)$ sia vera per un qualche $n \geq 2$ e proponiamoci di dimostrare che anche $Q(n+1)$ è vera. La derivata del primo membro di $Q(n)$ è $f^{(n+1)}(x)$. La derivata del secondo membro è

$$\begin{aligned}
D\Big(-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(1-2x)^{(2n-1)/2}}\Big) &= -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)D\big((1-2x)^{-(2n-1)/2}\big) = \\
&= -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot\Big(-\frac{2n-1}{2}\Big)(1-2x)^{-(2n-1)/2-1}(-2) = \\
&= -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)(1-2x)^{-(2n+1)/2} = \\
&= -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{(1-2x)^{(2n+1)/2}}\,.
\end{aligned}$$

Dunque vale l'uguaglianza

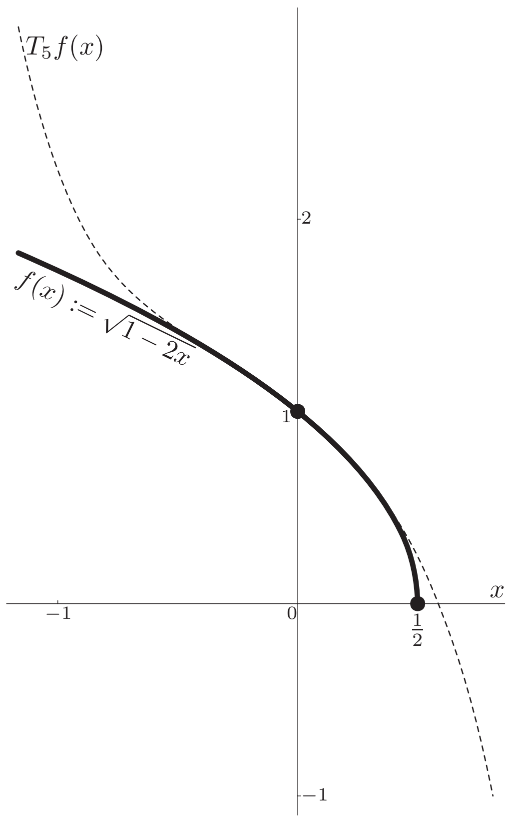
$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{(1-2x)^{(2n+1)/2}}\,,$$

ma questa è proprio $Q(n+1)$, come si vede sostituendo $n+1$ al posto di n in $Q(n)$:

$$Q(n+1): \qquad f^{(n+1)}(x) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-3)}{(1-2x)^{(2(n+1)-1)/2}}\,.$$

c. Usando i punti precedente calcoliamo le derivate di f nell'origine fino all'ordine 5. Dato che $(1-2x)^{(2n-1)/2}$ è sempre uguale a 1 quando $x = 0$, abbiamo che $f^{(n)}(0) = -1\cdot 3\cdots(2n-3)$ per $n \geq 2$, cioè

$$\begin{aligned}
f(0) &= \sqrt{1-2\cdot 0} = 1\,,\\
f'(0) &= -\frac{1}{\sqrt{1-2\cdot 0}} = -1\,,\\
f''(0) &= -1\,,\\
f'''(0) &= -1\cdot 3 = -3\,,\\
f^{(4)}(0) &= -1\cdot 3\cdot 5 = -15\,,\\
f^{(5)}(0) &= -1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 105\,.
\end{aligned}$$



Questi valori si potevano anche ricavare senza usare i punti precedenti, derivando $\sqrt{1-2x}$ con pazienza cinque volte. Comunque ci siamo arrivati, il polinomio di MacLaurin di $f(x)$ di ordine 5 è

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{-1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-3}{3!}x^3 + \frac{-3\cdot 5}{4!}x^4 + \\
&\quad + \frac{-3\cdot 5\cdot 7}{5!}x^5 = \\
&\quad = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{5}{8}x^4 - \frac{7}{8}x^5\,.
\end{aligned}$$