Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 7 luglio 2004

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3-2e^x+2x-\cos x}{3x^2+2\ln(1+x-x^2)-\operatorname{sen}2x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{6-6\sqrt{x}+\ln(x^2+x-1)}{1+\cos(\pi x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4^x+x^2}-\sqrt{4^x-2^x}\right)$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x)-\arctan(x^2-3x)}{\cos(2x)-1}$.

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}}$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) della funzione $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{5-2x^2}}$, usando per esempio il cambio di variabili $x=\sqrt{5/2}\cos t$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-n^5+3}{n^4+3^n+\ln n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n}$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\arctan\sqrt{y-e^x}$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

Punti: 3+3+3+3, 2+3+1+2+2+2, 5, 3+3, 5.

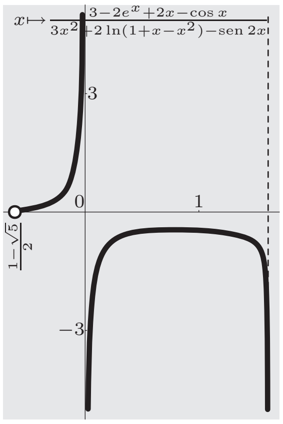
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

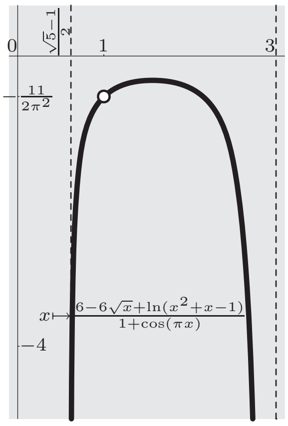
Analisi Matematica

Prova Scritta del 7 luglio 2004

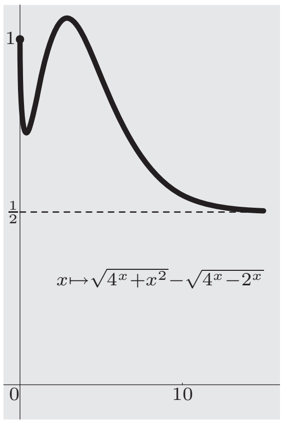
Svolgimento



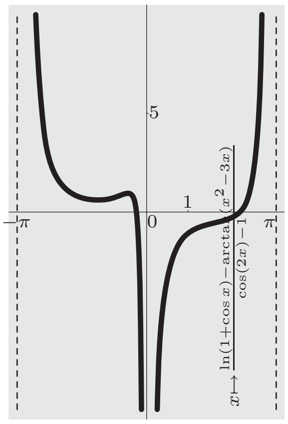
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando la regola de l'Hôpital si riottiene 0/0 e quindi la si applica una seconda volta. Si arriva alla forma 1/0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-2e^x+2x-\cos x}{3x^2+2\ln(1+x-x^2)-\operatorname{sen} 2x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x+2+\operatorname{sen} x}{6x+2\frac{1-2x}{1+x-x^2}-2\cos 2x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x+\cos x}{6+2\frac{-2(1+x-x^2)-(1-2x)(1-2x)}{(1+x-x^2)^2}+4\operatorname{sen} 2x} =$$

$$= \frac{-2+1}{6+2\frac{-2-1}{1}+0} = -\frac{1}{0} = \pm\infty\,.$$

Per trovare il segno dell'infinito finale raccogliamo x al denominatore:

$$\begin{aligned}
6+2\frac{-2(1+x-x^2)-(1-2x)(1-2x)}{(1+x-x^2)^2} &= 6+2\frac{-2-2x+2x^2-1-4x^2+4x}{1+x^2+x^4+2x-2x^2-2x^3} = \\
&= \frac{6+6x^2+6x^4+12x-12x^2-12x^3+2(-2x^2+2x-3)}{1+x^2+x^4+2x-2x^2-2x^3} = \\
&= \frac{6x^4-12x^3-10x^2+16x}{1+x^2+x^4+2x-2x^2-2x^3} = \\
&= x\frac{6x^3-12x^2-10x+16}{(1+x-x^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{-2e^x+\cos x}{6+2\frac{-2(1+x-x^2)-(1-2x)(1-2x)}{(1+x-x^2)^2}+4\operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\overbrace{-2e^x+\cos x}^{\to -1}}{\underbrace{\frac{6x^3-12x^2-10x+16}{(1+x-x^2)^2}+8\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}_{\to 16+8=24}}\,.$$

Concludiamo che esistono i limiti da destra e sinistra:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3-2e^x+2x-\cos x}{3x^2+2\ln(1+x-x^2)-\operatorname{sen}2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{-2e^x+\cos x}{\frac{6x^3-12x^2-10x+16}{(1+x-x^2)^2}+8\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}} = (+\infty)\cdot\Big(-\frac{1}{24}\Big) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to0^-} \frac{3-2e^x+2x-\cos x}{3x^2+2\ln(1+x-x^2)-\operatorname{sen}2x} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}\cdot\frac{-2e^x+\cos x}{\frac{6x^3-12x^2-10x+16}{(1+x-x^2)^2}+8\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}} = (-\infty)\cdot\Big(-\frac{1}{24}\Big) = +\infty\,,$$

e sono diversi.

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando la regola de l'Hôpital si riottiene 0/0 e quindi la si applica una seconda volta, arrivando a una forma non indeterminata:

$$\lim_{x\to1} \frac{6-6\sqrt{x}+\ln(x^2+x-1)}{1+\cos(\pi x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to1} \frac{-6(1/2)x^{-1/2}+\frac{2x+1}{x^2+x-1}}{\big(-\operatorname{sen}(\pi x)\big)\pi} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to1} \frac{-3(-1/2)x^{-3/2}+\frac{2(x^2+x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}}{\big(-\cos(\pi x)\big)\pi^2} =$$
$$= \frac{-3(-1/2)1^{-3/2}+\frac{2(1^2+1-1)-(2\cdot1+1)^2}{(1^2+1-1)^2}}{\big(-\cos(\pi\cdot1)\big)\pi^2} = \frac{3/2-7}{\pi^2} = -\frac{11}{2\pi^2}\,.$$

c. Entrambi gli addendi

$$\sqrt{4^x+x^2} = \sqrt{2^{2x}+x^2} = \sqrt{2^{2x}\Big(1+\frac{x^2}{2^{2x}}\Big)} = 2^x\sqrt{1+\frac{x^2}{2^{2x}}}\,,$$
$$\sqrt{4^x-2^x} = \sqrt{2^{2x}-2^x} = \sqrt{2^{2x}\Big(1-\frac{1}{2^x}\Big)} = 2^x\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}$$

tendono a $+\infty$ per $x\to+\infty$, e quindi il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Per di più entrambi sono asintoticamente equivalenti a 2^x. Usiamo il trucco di moltiplicare e dividere per la somma delle radici:

$$\sqrt{4^x+x^2}-\sqrt{4^x-2^x} = \frac{\big(\sqrt{4^x+x^2}-\sqrt{4^x-2^x}\big)\big(\sqrt{4^x+x^2}+\sqrt{4^x-2^x}\big)}{\sqrt{4^x+x^2}+\sqrt{4^x-2^x}} =$$
$$= \frac{4^x+x^2-(4^x-2^x)}{\sqrt{4^x+x^2}+\sqrt{4^x-2^x}} = \frac{x^2+2^x}{2^x\sqrt{1+\frac{x^2}{2^{2x}}}+2^x\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}} =$$
$$= \frac{2^x\big(\frac{x^2}{2^x}+1\big)}{2^x\Big(\sqrt{1+\frac{x^2}{2^{2x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}\Big)} = \frac{\frac{x^2}{2^x}+1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2^{2x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}} \to$$
$$\to \frac{0+1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}\,.$$

Il limite cercato vale quindi 1/2.

d. Il limite si presenta nella forma *non* indeterminata $(\ln 2)/0$. Il segno del limite deriva dal segno di numeratore e denominatore. Il numeratore tende a $\ln 2$, che è $> \ln 1 = 0$. Il denominatore è negativo, perché il coseno è sempre ≤ 1. Quindi

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\cos x)-\arctan(x^2-3x)}{\cos(2x)-1} = \frac{\ln 2}{0^-} = -\infty\,.$$

2. a. La funzione
$$f(x) := \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}}$$
è definita per gli x per i quali il radicando è ≥ 0 e il denominatore è $\neq 0$:
$$\begin{cases} |5-2x^2| \geq 0 \\ \sqrt{|5-2x^2|} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |5-2x^2| \neq 0 \end{cases} \iff 5-2x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$
Quindi il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}\}$. Si vede che $f(-x) = f(x)$ per ogni x, e quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. La funzione è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue nel loro dominio (il valore assoluto è una funzione continua dappertutto). I comportamenti al limite da studiare sono per $x \to \pm\infty$ e per $x \to \pm\sqrt{5/2}$. Giacché
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{|x|^2\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = \\ &= \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = \frac{|x|^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = |x|\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}}\,, \end{aligned}$$
abbiamo che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = +\infty \cdot \frac{1-0}{\sqrt{|0-2|}} = +\infty\,.$$
Quanto ai limiti per $x \to \pm\sqrt{5/2}$ (non importa se da sinistra o da destra), si presentano in una forma non indeterminata:
$$\lim_{x\to\pm\sqrt{5/2}} f(x) = \frac{\left(\pm\sqrt{5/2}\right)^2-1}{0^+} = \frac{3/2}{0^+} = +\infty\,.$$
Per certi calcoli conviene esplicitare il valore assoluto:
$$5-2x^2 \begin{cases} >0 & \text{se } -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}, \\ =0 & \text{se } x = \pm\sqrt{5/2}, \\ <0 & \text{se } x < -\sqrt{5/2} \text{ o } x > \sqrt{5/2}. \end{cases}$$
Quindi
$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{5-2x^2}} & \text{se } -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}, \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x^2-5}} & \text{se } x < -\sqrt{5/2} \text{ o } x > \sqrt{5/2}. \end{cases}$$

b. Dato che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to \pm\sqrt{5/2}$, il grafico della funzione ha le due rette $x = \pm\sqrt{5/2}$ come asintoti verticali. Per vedere se c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ calcoliamo l'eventuale coefficiente angolare:
$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x|x|\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = \frac{1-0}{\sqrt{|0-2|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$
L'eventuale asintoto di equazione $y = m_1x + q_1$ avrebbe come valore di q_1
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - m_1x\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$
Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Usiamo la forma di $f(x)$ valida per $x > \sqrt{5/2}$, facciamo denominatore comune e poi moltiplichiamo e dividiamo per la somma:
$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{\sqrt{2}} &= \frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2-5}} - \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(x^2-1) - x\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{2}\sqrt{2x^2-5}} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}(x^2-1) - x\sqrt{2x^2-5}\right)\left(\sqrt{2}(x^2-1) + x\sqrt{2x^2-5}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{2x^2-5}\left(\sqrt{2}(x^2-1) + x\sqrt{2x^2-5}\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x^2-1)^2 - x^2(2x^2-5)}{|x|\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}(x^2-1) + x\cdot|x|\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{2x^4 - 4x^2 + 2 - 2x^4 + 5x^2}{x\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot x^2\left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{x^2+2}{x^3\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{x^2\big(1+\frac{2}{x^2}\big)}{x^3\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)}\,.$$

Quindi

$$q_1 = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - m_1 x\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1+0}{\sqrt{2}(1-0)\big(\sqrt{2}(1-0) + \sqrt{2-0}\big)} = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0\,.$$

La retta di equazione $y = x/\sqrt{2}$ è dunque asintoto al grafico di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Dato che il grafico della f è simmetrico rispetto all'asse y, la retta simmetrica, cioè quella di equazione $y = -x/\sqrt{2}$, risulta asintoto al grafico di $f(x)$ per $x \to -\infty$. Se non si usa la simmetria bisogna svolgere i conti a parte:

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^2\big(1-\frac{1}{x^2}\big)}{x|x|\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^2\big(1-\frac{1}{x^2}\big)}{x(-x)\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left|\frac{5}{x^2}-2\right|}} = -\frac{1-0}{\sqrt{|0-2|}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Per $x < -\sqrt{5/2}$ vale

$$f(x) - m_2 x = f(x) + \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2-5}} + \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(x^2-1) + x\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{2}\sqrt{2x^2-5}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}(x^2-1) + x\sqrt{2x^2-5}\right)\left(\sqrt{2}(x^2-1) - x\sqrt{2x^2-5}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{2x^2-5}\left(\sqrt{2}(x^2-1) + x\sqrt{2x^2-5}\right)} =$$
$$= \frac{2(x^2-1)^2 - x^2(2x^2-5)}{|x|\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}(x^2-1) - x\cdot|x|\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{2x^4 - 4x^2 + 2 - 2x^4 + 5x^2}{-x\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot x^2\left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{x^2+2}{-x^3\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= \frac{x^2\big(1+\frac{2}{x^2}\big)}{-x^3\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)} =$$
$$= -\frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}} \cdot \left(\sqrt{2}\big(1-\frac{1}{x^2}\big) + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\right)}\,.$$

Quindi

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x) - m_2 x\bigr) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\cdot\Bigl(\sqrt{2}\bigl(1-\frac{1}{x^2}\bigr)+\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}\Bigr)} =$$

$$= -\frac{1}{-\infty}\cdot\frac{1+0}{\sqrt{2}(1-0)\bigl(\sqrt{2}(1-0)+\sqrt{2-0}\bigr)} = 0\cdot\frac{1}{4} = 0\,.$$

La retta di equazione $y = -x/\sqrt{2}$ è dunque asintoto al grafico di $f(x)$ per $x \to -\infty$.

c. Dove la funzione è definita, il denominatore è > 0. Quindi il segno di f coincide col segno del numeratore, cioè col segno di $x^2 - 1$:

$$f(x)\begin{cases} > 0 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \text{ (fermo restando } x \neq \pm\sqrt{5/2}\text{)},\\ = 0 & \text{se } x = \pm 1,\\ < 0 & \text{se } -1 < x < 1.\end{cases}$$

d. Calcoliamo la derivata separatamente a seconda del segno di $5 - 2x^2$. Se $x < -\sqrt{5/2}$ o $x > \sqrt{5/2}$ allora

$$f'(x) = D\Bigl(\frac{x^2-1}{\sqrt{5-2x^2}}\Bigr) = \frac{2x\sqrt{5-2x^2}-(x^2-1)(1/2)(5-2x^2)^{-1/2}(-4x)}{5-2x^2} =$$

$$= \frac{2x(5-2x^2)+2x(x^2-1)}{(5-2x^2)^{3/2}} = \frac{-2x^3+8x}{(5-2x^2)^{3/2}} = \frac{2x(4-x^2)}{(5-2x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2x(2-x)(2+x)}{(5-2x^2)^{3/2}}\begin{cases} > 0 & \text{se } -2 < x < -\sqrt{5/2} \text{ o } x > 2,\\ = 0 & \text{se } x = \pm 2,\\ < 0 & \text{se } -\sqrt{5/2} < x < 2.\end{cases}$$

Se invece $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$ allora

$$f'(x) = D\Bigl(\frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2-5}}\Bigr) = \frac{2x\sqrt{2x^2-5}-(x^2-1)(1/2)(2x^2-5)^{-1/2}(4x)}{2x^2-5} =$$

$$= \frac{2x(2x^2-5)-2x(x^2-1)}{(2x^2-5)^{3/2}} = \frac{2x^3-8x}{(2x^2-5)^{3/2}} = \frac{2x(x^2-4}{(2x^2-5)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2x(x-2)(x+2)}{(2x^2-5)^{3/2}}\begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \sqrt{5/2},\\ = 0 & \text{se } x = 0,\\ < 0 & \text{se } -\sqrt{5/2} < x < 0.\end{cases}$$

La funzione è decrescente su $]-\infty,-2]$, crescente su $[-2,-\sqrt{5/2}[$, decrescente su $]-\sqrt{5/2},0]$, crescente su $[0,\sqrt{5/2}[$, decrescente su $]\sqrt{5/2},2]$, e infine crescente su $[2,+\infty[$. I punti 0 e ± 2 sono di minimo locale:

$$f(0) = \frac{0^2-1}{\sqrt{|5-2\cdot 0^2|}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad f(\pm 2) = \frac{2^2-1}{\sqrt{|5-2\cdot(\pm 2)^2|}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.$$

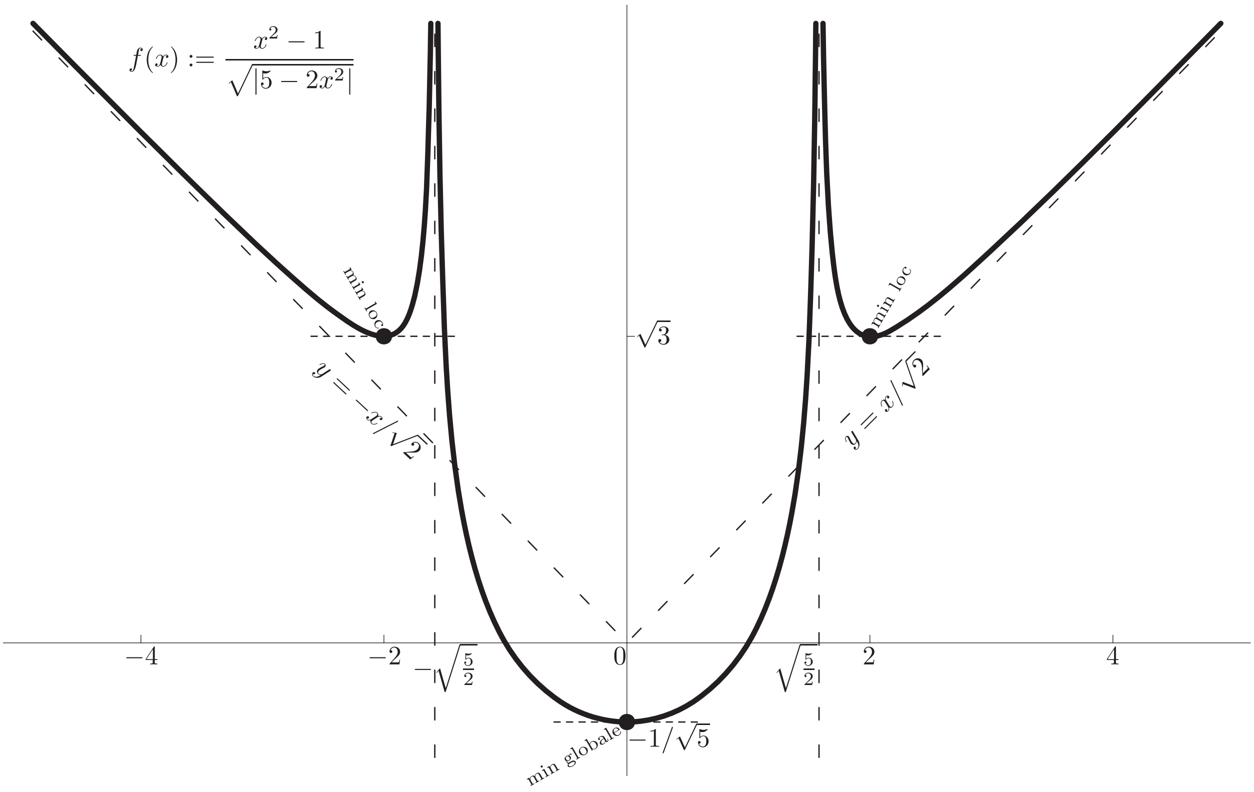
Il punto $x = 0$ è anche di minimo globale. Non ci sono punti di massimo locale.

e. Calcoliamo la derivata separatamente a seconda del segno di $5 - 2x^2$. Se $x < -\sqrt{5/2}$ o $x > \sqrt{5/2}$ allora

$$f''(x) = D\Bigl(\frac{8x-2x^3}{(5-2x^2)^{3/2}}\Bigr) = \frac{(8-6x^2)(5-2x^2)^{3/2}-(8x-2x^3)(3/2)(5-2x^2)^{1/2}(-4x)}{(5-2x^2)^3} =$$

$$= \frac{(8-6x^2)(5-2x^2)+(8x-2x^3)(6x)}{(5-2x^2)^{5/2}} = \frac{40-16x^2-30x^2+12x^4+48x^2-12x^4}{(5-2x^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{2x^2+40}{(5-2x^2)^{5/2}} > 0 \qquad \text{sempre.}$$



Se invece $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$ allora

$$\begin{aligned} f''(x) &= D\Big(\frac{2x^3-8x}{(2x^2-5)^{3/2}}\Big) = \frac{(6x^2-8)(2x^2-5)^{3/2} - (2x^3-8x)(3/2)(2x^2-5)^{1/2}(4x)}{(5-2x^2)^3} = \\ &= \frac{(6x^2-8)(2x^2-5) - (2x^3-8x)(6x)}{(2x^2-5)^{5/2}} = \frac{12x^4 - 30x^2 - 16x^2 + 40 - 12x^4 + 48x^2}{(2x^2-5)^{5/2}} = \\ &= \frac{2x^2+40}{(2x^2-5)^{5/2}} > 0 \qquad \text{sempre.} \end{aligned}$$

Quindi la funzione è convessa su ogni intervallo su cui è definita, cioè su $]-\infty, -\sqrt{5/2}[$, su $]-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}[$ e su $]\sqrt{5/2}, +\infty[$. Non ci sono punti di flesso.

3. Il cambio di variabile suggerito è $x = \sqrt{5/2}\cos t$, per cui $dx = \sqrt{5/2}(-\operatorname{sen} t)dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx &= \int \frac{(\sqrt{5/2}\cos t)^2 - 1}{\sqrt{5-2\big(\sqrt{5/2}\cos t\big)^2}}\sqrt{\frac{5}{2}}(-\operatorname{sen} t)dt = -\sqrt{\frac{5}{2}}\int \frac{(5/2)\cos^2 t - 1}{\sqrt{5-5\cos^2 t}}(\operatorname{sen} t)\,dt = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{5\cos^2 t - 2}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(\operatorname{sen} t)\,dt = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{5\cos^2 t - 2}{\operatorname{sen} t}(\operatorname{sen} t)\,dt = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int (5\cos^2 t - 2)\,dt = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\int \cos^2 t\,dt + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int 2\,dt = \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{2}}\int \cos^2 t\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\int dt = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\int \cos^2 t\,dt + \frac{t}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

(Strettamente parlando avremmo dovuto scrivere $\sqrt{1-\cos^2 t} = |\operatorname{sen} x|$, ma l'esperienza con gli integrali insegna ad andare avanti ignorando i valori assoluti). Una primitiva di $\cos^2 t$ si può ottenere usando l'identità trigonometrica $\cos^2 t = (\cos 2t + 1)/2$:

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (\cos 2t + 1)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\Big) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}t\,.$$

Altrimenti integrando per parti e usando l'identità $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t\,dt &= \int (\cos t)(\cos t)\,dt = \int (\cos t)D(\operatorname{sen} t)dt = \cos t \operatorname{sen} t - \int (D\cos t)\operatorname{sen} t\,dt = \\ &= \operatorname{sen} t\cos t - \int (-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t\,dt = \operatorname{sen} t\cos t + \int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \\ &= \operatorname{sen} t\cos t + \int (1-\cos^2 t)\,dt = \operatorname{sen} t\cos t + t - \int \cos^2 t\,dt\,.\end{aligned}$$

Sommando a entrambi i membri $\int \cos^2 t\,dt$ si ricava

$$2\int \cos^2 t\,dt = \operatorname{sen} t\cos t + t\,, \qquad \text{cioè} \qquad \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}t\,.$$

Per avere una primitiva della funzione originale dobbiamo ritornare alla variabile x: da $x = \sqrt{5/2}\cos t$ si ricava $\cos t = x\sqrt{2/5}$ e $t = \arccos(x\sqrt{2/5})$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx &= -\frac{5}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{2}t\Big) + \frac{t}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\cos t - \frac{5}{4\sqrt{2}}t + \frac{t}{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{5}{4\sqrt{2}}\sqrt{1-(\cos t)^2}\cos t - \frac{t}{4\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{5}{4\sqrt{2}}\Bigg(\sqrt{1-\frac{2}{5}x^2}\Bigg)x\sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arccos(x\sqrt{2/5}) = \\ &= -\frac{1}{4}x\sqrt{5-2x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arccos(x\sqrt{2/5})\,.\end{aligned}$$

4. a. Per $n \to +\infty$ gli addendi dominanti sono gli esponenziali, che vincono su potenze e logaritmi. Al numeratore il dominante è e^n, al denominatore è 3^n, che raccogliamo:

$$\begin{aligned}\frac{e^n - n^5 + 3}{n^4 + 3^n + \ln n} &= \frac{e^n\big(1 - \frac{n^5}{e^n} + \frac{3}{e^n}\big)}{3^n\big(\frac{n^4}{3^n} + 1 + \frac{\ln n}{3^n}\big)} = \\ &= \Big(\frac{e}{3}\Big)^n \cdot \frac{1 - \frac{n^5}{e^n} + \frac{3}{e^n}}{\frac{n^4}{3^n} + 1 + \frac{\ln n}{3^n}} = \\ &= (e/3)^n \cdot (\text{qualcosa che tende a } 1)\,.\end{aligned}$$

Il termine generale della serie è quindi asintoticamente equivalente a $(e/3)^n$:

$$\frac{e^n - n^5 + 3}{n^4 + 3^n + \ln n} \sim (e/3)^n \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

La serie geometrica $\sum (e/3)^n$ converge perché la ragione $e/3$ è positiva e minore di 1. Per il criterio dell'equivalenza asintotica, anche la serie originale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - n^5 + 3}{n^4 + 3^n + \ln n}$$

converge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$a_n/(e/3)^n$
1	1,17957	1,17957	1,30
2	−0,84112	0,33845	−1,02
3	−2,01574	−1,67729	−2,71
4	−2,85591	−4,53320	−4,24
5	−3,41945	−7,95265	−5,60
6	−3,63608	−11,58873	−6,57
7	−3,42212	−15,01085	−6,82
8	−2,79424	−17,80509	−6,15
9	−1,94096	−19,74606	−4,71
10	−1,12917	−20,87523	−3,03
11	−0,52752	−21,40275	−1,56
12	−0,15588	−21,55863	−0,51
13	0,04383	−21,51480	0,16
14	0,13788	−21,37692	0,55
15	0,17429	−21,20264	0,77
16	0,18179	−21,02084	0,88
17	0,17594	−20,84491	0,94
18	0,16456	−20,68035	0,97
19	0,15142	−20,52893	0,99
20	0,13822	−20,39071	0,99

b. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n}$$
è a segni alterni. Proviamo col criterio della convergenza assoluta:

n	$(-1)^n b_n$	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k b_k$	b_{n+1}/b_n
1	−0,33333333	−0,33333333	0,056
2	0,01851852	−0,31481481	0,022
3	−0,00041152	−0,31522634	0,012
4	0,00000490	−0,31522144	0,007
5	−0,00000004	−0,31522147	0,005

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n}\,.$$

Criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
b_n &:= \frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n}\,,\\
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{2^{n+1}}{\big(2(n+1)\big)!\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!\cdot 3^n}{2^n} = \frac{2^n 2^1}{(2n+2)!\cdot 3^n 3^1}\cdot\frac{(2n)!\cdot 3^n}{2^n} =\\
&= \frac{2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\cdot 3}\cdot(2n)! = \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 \quad \text{per } n\to+\infty\,.
\end{aligned}$$

Poiché b_{n+1}/b_n tende a 0, che è <1, la serie $\sum b_n$, e quindi anche $\sum(-1)^n b_n$, converge.
Si poteva anche procedere notando una somiglianza con la serie di MacLaurin del coseno:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Nel nostro caso ci riportiamo a tale schema così

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!\cdot 3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2/3)^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\big(\sqrt{2/3}\big)^{2n}}{(2n)!} =\\
&= -(-1)^0\frac{\big(\sqrt{2/3}\big)^0}{(2\cdot 0)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\big(\sqrt{2/3}\big)^{2n}}{(2n)!} = -1+\cos\sqrt{2/3}\,.
\end{aligned}$$

La serie data pertanto converge, non solo, ma la somma è $-1+\cos\sqrt{2/3}\approx -0{,}315221$.

5. L'arcotangente non ha restrizioni sul dominio. La radice quadrata richiede che l'argomento sia ≥ 0. L'espressione $y-e^x$ è definita per ogni $x,y\in\mathbb{R}$. Quindi la condizione affinché $f(x,y):=\arctan\sqrt{y-e^x}$ sia definita nel punto (x,y) è che $y-e^x\geq 0$, cioè $y\geq e^x$. Geometricamente il dominio è l'insieme dei punti che stanno al di sopra del grafico della funzione $x\mapsto e^x$, grafico stesso compreso. Nella figura a sinistra della pagina seguente il dominio è la regione in grigio.
L'insieme di livello k è l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y)=k\}$. Per capire com'è fatto trascuriamo dapprima le condizioni di esistenza:

$$\begin{aligned}
f(x,y)=k \quad&\Rightarrow\quad \arctan\sqrt{y-e^x}=k \quad\Rightarrow\quad \tan\arctan\sqrt{y-e^x}=\tan k\sqrt{y-e^x}=\tan k\\
&\Rightarrow\quad y-e^x=(\tan k)^2 \quad\Rightarrow\quad y=e^x+\tan^2 k\,.
\end{aligned}$$

L'insieme di livello k è dunque un sottinsieme della curva di equazione $y=e^x+\tan^2 k$, che è una traslata verso l'alto della curva $y=e^x$. Tenendo conto che l'arcotangente di un numero è sempre compresa (strettamente) fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, e che la radice quadrata di un numero è sempre ≥ 0, si ricavano le condizioni precise:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = k \quad &\iff \quad \arctan\sqrt{y-e^x} = k \quad \iff \quad \begin{cases} \text{impossibile} & \text{se } k \leq -\pi/2 \text{ o } k \geq \pi/2, \\ \sqrt{y-e^x} = \tan k & \text{se } -\pi/2 < k < \pi/2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \text{impossibile} & \text{se } k \leq -\pi/2 \text{ o } k \geq \pi/2, \\ \text{impossibile} & \text{se } \tan k < 0 \\ y - e^x = \tan^2 k & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \text{impossibile} & \text{se } k \leq -\pi/2 \text{ o } k \geq \pi/2, \\ \text{impossibile} & \text{se } \tan k < 0 \\ y = e^x + \tan^2 k & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \text{impossibile} & \text{se } k < 0 \text{ o } k \geq \pi/2, \\ y = e^x + \tan^2 k & \text{se } 0 \leq k < \pi/2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dunque l'insieme di livello k è la curva di equazione $y = e^x + \tan^2 k$ se $0 \leq k < \pi/2$, mentre è vuoto altrimenti.