Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 1 aprile 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4\operatorname{sen} x + 8\sqrt{x+1} - 8}{4x - 4e^x - \cos 2x + 5}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 2\log(1 - \operatorname{arcsen} x) - \sqrt{x+4} + 2}{\log(1+x^2)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^3 + e^{2x} + 1)}{\sqrt{x^2+7}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2x}}{\operatorname{sen} x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(\cos 2x)\operatorname{sen} x - 3e^x + 3\sqrt[3]{1-x}}{\arctan x + e^x + 2\log(1-x) - 1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} + x - 2\operatorname{sen}(x^2+x)}{5x - e^{\operatorname{sen} x} + \cos x - 8\sqrt{x+1} + 8}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan(\operatorname{sen} x) + 2\log(2-\cos x) - \sqrt{x^2-2x+4} + 2}{\log(1+\operatorname{sen} x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

4. Definiamo per induzione la successione di funzioni $p_1(x) \equiv 1$, $p_{n+1}(x) = (x^2+1)p_n'(x) - 2nxp_n(x)$. Scrivere esplicitamente $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Dimostrare che $p_n(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Consideriamo anche la funzione $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che $f^{(n)}(x) = p_n(x)/(1+x^2)^n$ per ogni $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Punti: 2+2+2+2+2+2+2, 7, 9, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 1 aprile 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1-x} - 2e^{-x} - \log(1+\operatorname{sen} x)}{\arctan x + e^{-x} - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x} + (1-x)x - 2\operatorname{sen}(x-x^2)}{5x - e^{\operatorname{sen} x} + \cos x - 8\sqrt{x+1} + 8}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x}}{x - x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^2 + e^{3x} + 1)}{\sqrt{x^2+4}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^3 + \cos 2x + 4\sqrt{x^2+1} - 5}{2x^2 - e^{-2x} - 2\operatorname{sen} x + 1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 2\log(\cos x - \operatorname{sen} x) - \sqrt{4-x} + 2}{1 - \cos x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{arcsen}(\log(1+x)) + 3\operatorname{sen}(1-\cos x) - \sqrt{x^2 - x + 9} + 3}{\operatorname{sen}(e^x - 1)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 2x + 2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

4. Definiamo per induzione la successione di funzioni $p_1(x) \equiv 1$, $p_{n+1}(x) = (x^2+1)p_n'(x) - 2nxp_n(x)$. Scrivere esplicitamente $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Dimostrare che $p_n(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Consideriamo anche la funzione $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che $f^{(n)}(x) = p_n(x)/(1+x^2)^n$ per ogni $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Punti: 2+2+2+2+2+2+2, 7, 9, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 1 aprile 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 3\log(\cos x - \tan x) - \sqrt{x+9} + 3}{\operatorname{sen}^2 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{x^3 + x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 4x - 3e^x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x - x^2)}{9x + e^{\operatorname{sen} x} - \cos 2x + 20\sqrt{1-x} - 20}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1 - 4x^5 + e^{2x})}{\sqrt{2x^2+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 2\operatorname{sen} x + 2\sqrt{1-x^2} - 2}{3x + 3\arctan x - 2\operatorname{sen} 3x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\log(\cos x) - 3x - 2e^{-x} + 2\sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}(x - x^2) - \arctan x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(1 - e^x) - 3\cos 2x + \sqrt{x^2 + 4 - \operatorname{sen} x} + 1}{-1 + \cos\sqrt{x}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 5}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

4. Definiamo per induzione la successione di funzioni $p_1(x) \equiv 1$, $p_{n+1}(x) = (x^2+1)p_n'(x) - 2nxp_n(x)$. Scrivere esplicitamente $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Dimostrare che $p_n(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Consideriamo anche la funzione $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che $f^{(n)}(x) = p_n(x)/(1+x^2)^n$ per ogni $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Punti: 2+2+2+2+2+2+2, 7, 9, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 1 aprile 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 2\log(\cos 2x - \operatorname{arcsen} x) + 2 - \sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}(x^2)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1 + e^{3x} - x^3)}{\sqrt{3x^2+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}(x^2+x)}{12x - e^{2\operatorname{sen} x} + \cos x - 20\sqrt{x+1} + 20}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x}}{\tan x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen}(\log(1+x)) + \sqrt{\cos x} - 2}{\operatorname{sen}(x^2+x) - \operatorname{arcsen} x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x + \operatorname{sen}(2x^2) + 16\sqrt{1-x} - 16}{\arctan x - x^2 + \operatorname{sen}(x^2 - x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\log(1-x)) - 3\cos^2(2x) + 1 + \sqrt{x^2+5-\cos x}}{e^{\operatorname{sen} x}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x + 5}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

4. Definiamo per induzione la successione di funzioni $p_1(x) \equiv 1$, $p_{n+1}(x) = (x^2+1)p_n'(x) - 2nxp_n(x)$. Scrivere esplicitamente $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Dimostrare che $p_n(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Consideriamo anche la funzione $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che $f^{(n)}(x) = p_n(x)/(1+x^2)^n$ per ogni $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Punti: 2+2+2+2+2+2+2, 7, 9, 6.