Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 settembre 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{7\log(2x-1)-3\tan^2(\frac{\pi}{2}x)}{\arccos x+(x-2)^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\arctan x)+e^x-(x+1)\cos x}{x\sqrt{1-x}-2\operatorname{sen} x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{sen} x-5\tan x-2x}{x^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(2+4x)\operatorname{sen}(x-x^2)-(1+x)e^x+\cos x}{x-\arctan x}$.

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{x}$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
f. si tracci infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x)=\ln(1-x^2)$.

4. Studiare la convergenza delle serie

$$\textbf{a.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2}\frac{1}{n^5}\,,\qquad\qquad \textbf{b.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,.$$

5. Della funzione di due variabili $f(x,y)=\ln\big(\sqrt{x^2+y^2-1}-y\big)$

a. si determini il dominio e lo si rappresenti sul piano cartesiano;
b. si descrivano geometricamente e rappresentino le linee di livello.

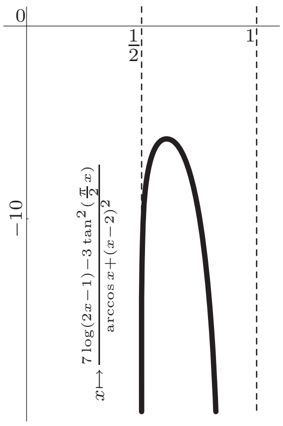
Punti: 2+2+2+3, 2+2+2+2+2+2, 4, 3+3, 3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

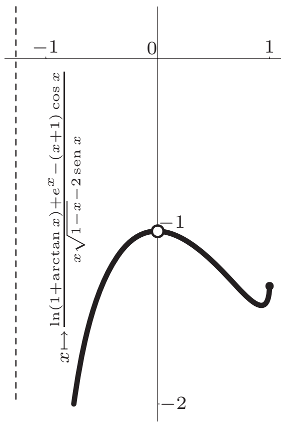
Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 settembre 2003

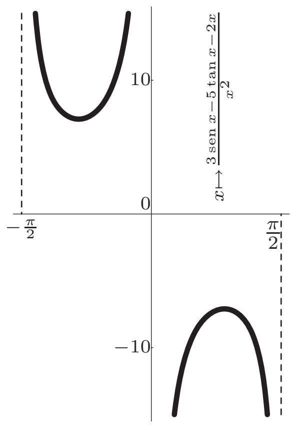
Svolgimento



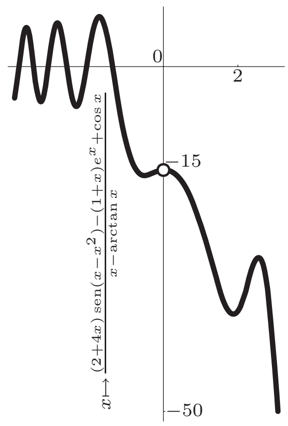
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{7\ln(2x-1) - 3\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\arccos x + (x-2)^2} = \frac{0-\infty}{0+1} = -\infty\,.$$

b. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arctan x) + e^x - (x+1)\cos x}{x\sqrt{1-x} - 2\operatorname{sen} x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + e^x - \cos x + (x+1)\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} - 2\cos x} =$$

$$= \left[\frac{1+1-1+0}{1-0-2}\right] = -1.$$

c. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata 0/0) ai limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3\operatorname{sen} x - 5\tan x - 2x}{x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0^\pm} \frac{3\cos x - \frac{5}{\cos^2 x} - 2}{2x} = \left[\frac{3-5-2}{0^\pm}\right] = \mp\infty\,,$$

quindi il limite completo non esiste.

d. Il limite potrebbe essere risolto utilizzando de l'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0). In questo caso è però preferibile usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{sen}(x-x^2) = (x-x^2) - \frac{(x-x^2)^3}{6} + o\big((x-x^2)^3\big) = x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

da cui si ricava

$$(2+4x)\operatorname{sen}(x-x^2) = (2+4x)\Big(x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) = 2x + 2x^2 - \frac{13}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$(1+x)e^x = (1+x)\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Quindi gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x) = \left(2x + 2x^2 - \frac{13}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) =$$
$$= -5x^3 + o(x^3),$$
$$\mathrm{Den}(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+4x)\operatorname{sen}(x-x^2) - (1+x)e^x + \cos x}{x - \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{-5x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-5 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -15\,.$$

Il limite richiesto vale allora -15.

2. a. Il dominio è $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x(\ln x + 2)}{x} = \left[\frac{(-\infty)\cdot(-\infty)}{0^+}\right] = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2(\ln x + 1)}{x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2/x}{1} = 0.$$

Quindi la funzione non ammette massimo assoluto.

b. Dallo studio in **a** si ricava subito che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale e la retta $y = 0$ un asintoto orizzontale a $+\infty$.

c. La funzione è ≥ 0 se e solo $\ln^2 x + 2\ln x \geq 0$ ovvero se $\ln x \leq -2$ oppure $\ln x \geq 0$, cioè $x \leq e^{-2}$ oppure $x \geq 1$

d. La derivata prima è

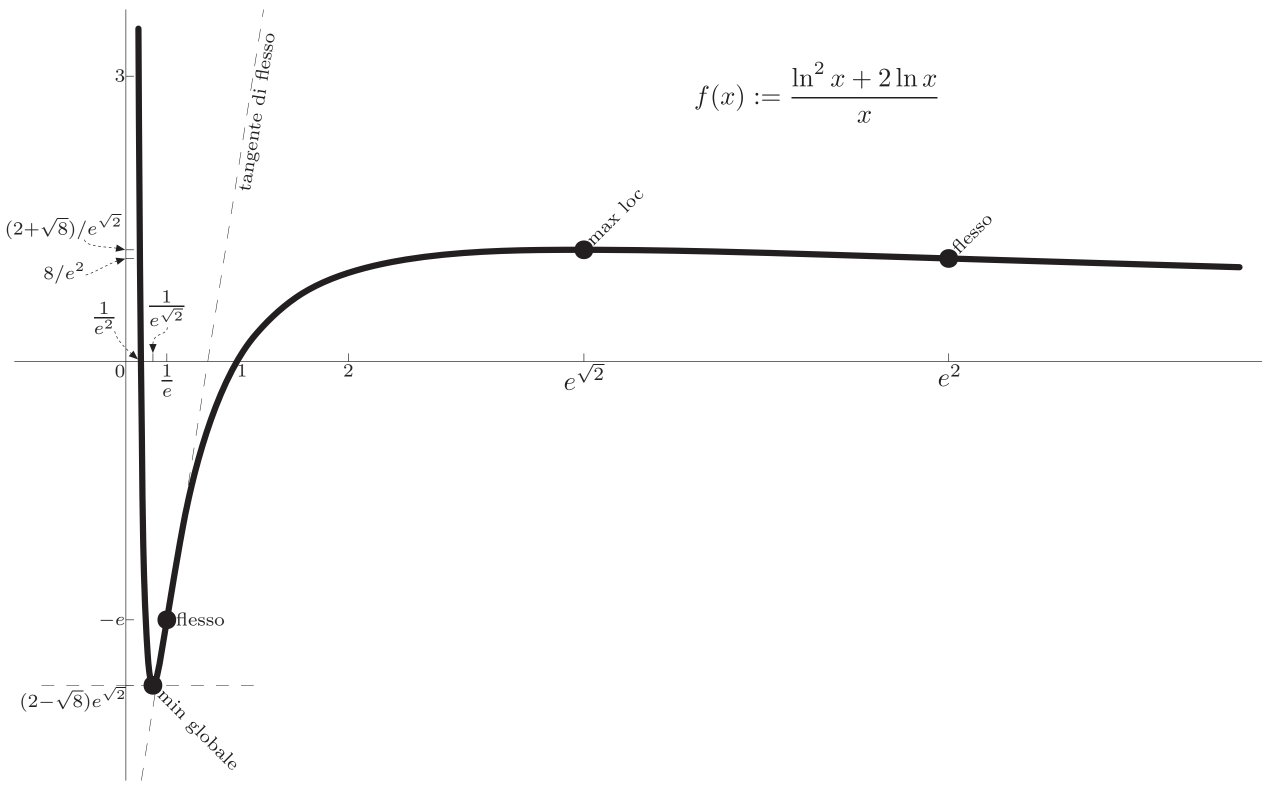
$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}\right)x - (\ln^2 x + 2\ln x)}{x^2} = \frac{2 - \ln^2 x}{x^2}\,,$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2 - \ln^2 x \geq 0$ ovvero se $-\sqrt{2} \leq \ln x \leq \sqrt{2}$, ovvero $e^{-\sqrt{2}} \leq x \leq e^{\sqrt{2}}$. La funzione è dunque crescente su $]e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}[$, decrescente su $]0, e^{-\sqrt{2}}[$ e su $]e^{\sqrt{2}}, +\infty[$. In $x = e^{-\sqrt{2}}$ e $x = e^{\sqrt{2}}$ ammette rispettivamente un minimo assoluto e un massimo relativo, con valori $f(e^{-\sqrt{2}}) = (2 - \sqrt{8})e^{\sqrt{2}}$ e $f(e^{\sqrt{2}}) = (2 + \sqrt{8})/e^{\sqrt{2}}$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-\frac{2\ln x}{x}x^2 - (2 - \ln^2 x)2x}{x^4} = 2\frac{\ln^2 x - \ln x - 2}{x^3}\,.$$

Si ha che $f''(x) \geq 0$ se e solo se $\ln^2 x - \ln x - 2 \geq 0$. Poiché le soluzioni dell'equazione $z^2 - z - 2 = 0$ sono -1 e 2, ciò accade se $\ln x \leq -1$ oppure $\ln x \geq 2$, ovvero $x \leq e^{-1}$ oppure $x \geq e^2$. La funzione è dunque convessa su $]0, 1/e[$ e su $]e^2, +\infty[$ mentre è concava su $]1/e, e^2[$. I punti $(1/e, -e)$ e $(e^2, 8/e^2)$ sono dei flessi del grafico di f.



3. Utilizzando il metodo per parti, per $x \in]-1,1[$, si ottiene

$$\int g(x)\,dx = x\ln(1-x^2) - \int x\frac{-2x}{1-x^2}\,dx = x\ln(1-x^2) - \int\Big(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx =$$
$$= x\ln(1-x^2) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + c =$$
$$= x\ln(1-x^2) - 2x - \ln\Big|\frac{x+1}{x-1}\Big|.$$

4. a. La serie è a termini ≥ 0. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2}\frac{1}{n^5}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^5} =$$
$$= e^{-1}\cdot 1 =$$
$$= \frac{1}{e} < 1\,,$$

quindi la serie converge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$\sqrt[n]{a_n}$
1	0,000000000	0,000000000	0,0000
2	0,001953125	0,001953125	0,0442
3	0,000107046	0,002060171	0,0475
4	0,000009788	0,002069959	0,0559
5	0,000001209	0,002071168	0,0655
6	0,000000181	0,002071350	0,0752
7	0,000000031	0,002071381	0,0847
8	0,000000006	0,002071387	0,0937

b. La serie è a termini positivi. Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\Big) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\Big) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

dunque la serie converge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	a_{n+1}/a_n
1	0,50000	0,50000	0,3333
2	0,16667	0,66667	0,3000
3	0,05000	0,71667	0,2857
4	0,01429	0,73095	0,2778
5	0,00397	0,73492	0,2727
6	0,00108	0,73600	0,2692
7	0,00029	0,73629	0,2667
8	0,00008	0,73637	0,2647

5. a. Il dominio è dato dalle soluzioni del sistema

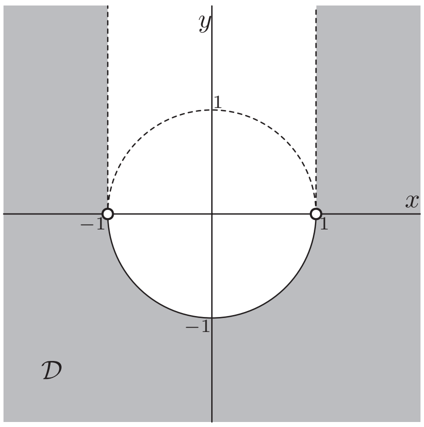
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - y > 0. \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta la regione di piano esterna alla circonferenza unitaria di centro l'origine. La seconda equazione è equivalente all'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ y > 0, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)^2 > y^2. \end{cases}$$

Espandendo il quadrato e semplificando:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ y > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$



Poiché $y^2 \geq 0$ sempre, la condizione $x^2 - 1 > 0$ implica $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, che quindi è superflua nel secondo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

La disequazione $x^2 - 1 > 0$ si espande in $x < -1$ oppure $x > 1$. In conclusione, il dominio della funzione si può allora scrivere come

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0, \ x^2 + y^2 \geq 1\right\} \cup \\ & \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0, x < -1 \vee x > 1\right\}. \end{aligned}$$

A parole, il dominio è formato dai punti del primo e secondo quadrante con ascissa non in $[-1, 1]$, e quelli del terzo e quarto quadrante che stanno al di fuori o sul bordo del cerchio unitario. Sull'asse x i punti del dominio sono quelli fuori da $[-1, 1]$.

b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x, y) = k$:

$$\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} - y\right) = k \iff \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - y = e^k \iff \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = y + e^k \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = (y + e^k)^2 \\ y + e^k \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = y^2 + 2ye^k + e^{2k} \\ y + e^k \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 1 = 2ye^k + e^{2k} \\ y + e^k \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k}}{2e^k} \\ y + e^k \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k}}{2e^k} \\ \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k}}{2e^k} + e^k \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k}}{2e^k} \\ \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k} + 2e^{2k}}{2e^k} \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1 - e^{2k}}{2e^k} \\ x^2 \geq 1 - e^{2k}. \end{cases}$$

A questo punto bisogna distinguere a seconda del segno di $1-e^{2k}$, che si vede essere l'opposto del segno di k: se $k \geq 0$ allora $e^{2k} \geq 1$ e quindi $1-e^{2k} \leq 0$, e la disuguaglianza $x^2 \geq 1-e^{2k}$ è automaticamente verificata; se invece $k<0$ allora $1-e^{2k}>0$ e la disuguaglianza $x^2 \geq 1-e^{2k}$ va lasciata. Quindi l'equazione $f(x,y)=k$ equivale a

$$\begin{cases} k \geq 0 \\ y = \dfrac{x^2-1-e^{2k}}{2e^k} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k < 0 \\ y = \dfrac{x^2-1-e^{2k}}{2e^k} \\ x \leq -\sqrt{1-e^{2k}} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{1-e^{2k}}. \end{cases}$$

Detto più a parole: l'insieme di livello k è la parabola $y=(x^2-1-e^{2k})/(2e^{2k})$ quando $k \geq 0$, mentre se $k<0$ è formato dai punti della parabola con ascisse non comprese in $]-\sqrt{1-e^{2k}}, \sqrt{1-e^{2k}}[$. Notiamo che in questo secondo caso la parabola è tangente al cerchio $x^2+y^2=1$ in due punti.