Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 4 settembre 2003

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2e^x-1)+3\,\mathrm{sen}(2x^2)}{(\mathrm{sen}\,x)\cos x+5\tan x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3x-1)(\arctan x)-3\ln(e+x)}{\mathrm{sen}(2x-x^2)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x+1}\,\mathrm{sen}(x+3x^2)+2\ln(1+3x)}{\mathrm{arcsen}(1+x)+(\cos x)\,\mathrm{sen}^3 x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-3x)e^{3x}-(2x^2+1)\cos x}{2x\,\mathrm{sen}\,x+\ln(1+x^2)}$.

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
f. si tracci infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x)=\ln(x^2+1)$.

4. Studiare la convergenza delle serie

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3}+2\arctan n-n}{3\log n+5n^2+2}$, **b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{(n^2)}}{(n!)^2}$

5. Della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2-7n+17}},$$

a. si studi la convergenza assoluta
b. e la convergenza semplice.

Punti: 2+2+2+3, 2+2+2+2+2+2, 4, 3+3, 3+3.

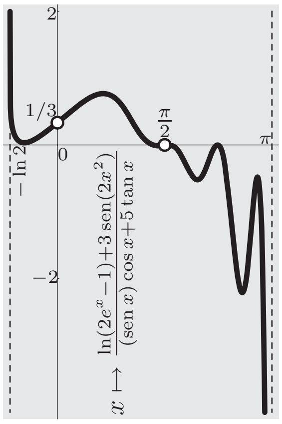
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

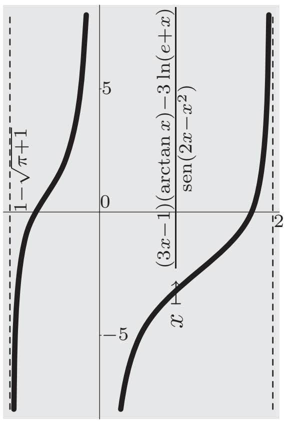
Analisi Matematica

Prova Scritta del 4 settembre 2003

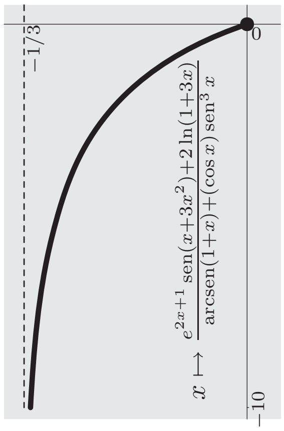
Svolgimento



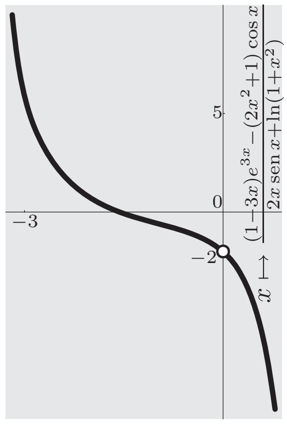
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2e^x-1)+3\,\mathrm{sen}(2x^2)}{\mathrm{sen}\,x\,\cos x+5\tan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2e^x}{2e^x-1}+12x\cos(2x^2)}{\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x+\frac{5}{\cos^2 x}}=\left[\frac{2+0}{1-0+5}\right]=\frac{1}{3}\,.$$

b. Il limite si presenta nella forma $[-3/0]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x=0$. Il numeratore tende a -3 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo se $2x-x^2>0$, il che accade quando $x\in\,]0,2[$. Quindi la funzione è negativa in un intorno sinistro di 0 e positiva in un intorno destro. Si conclude che

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{(3x-1)\arctan x-3\ln(e+x)}{\mathrm{sen}(2x-x^2)}=\left[\frac{-3}{0^\pm}\right]=\mp\infty\,,$$

dunque il limite completo non esiste.

c. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x+1}\,\mathrm{sen}(x+3x^2)+2\ln(1+3x)}{\mathrm{arcsen}(1+x)+\cos x(\mathrm{sen}\,x)^3}=\frac{0+0}{\pi/4+0}=0\,.$$

d. Si può applicare de l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-3x)e^{3x}-(2x^2+1)\cos x}{2x\,\mathrm{sen}\,x+\ln(1+x^2)}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-3e^{3x}+3(1-3x)e^{3x}-4x\cos x+(2x^2+1)\,\mathrm{sen}\,x}{2\,\mathrm{sen}\,x+2x\cos x+\frac{2x}{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-9xe^{3x}-4x\cos x+(2x^2+1)\,\mathrm{sen}\,x}{2\,\mathrm{sen}\,x+2x\cos x+\frac{2x}{1+x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-9e^{3x}-27xe^{3x}-4\cos x+8x\,\mathrm{sen}\,x+(2x^2+1)\cos x}{4\cos x-2x\,\mathrm{sen}\,x+\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{-9+0-4+0+1}{4-0+2}=-2.$$

Alternativamente dopo la prima applicazione di de l'Hôpital si poteva procedere nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-9xe^{3x}-4x\cos x+(2x^2+1)\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x+2x\cos x+\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-9e^{3x}-4\cos x+(2x^2+1)\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{2\frac{\operatorname{sen}x}{x}+2\cos x+\frac{2}{1+x^2}}=$$
$$=\frac{-9-4+1}{2+2+2}=-2.$$

Oppure, alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen}x=x+o(x^2),\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\qquad \ln(1+x^2)=x^2+o(x^2),$$
$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+o((3x)^2)=1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2),$$

si ha che gli sviluppi del numeratore $\operatorname{Num}(x)$ e del denominatore $\operatorname{Den}(x)$ sono

$$\operatorname{Num}(x)=(1-3x)\big(1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\big)-(2x^2+1)\big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)=-6x^2+o(x^2),$$
$$\operatorname{Den}(x)=2x\big(x+o(x^2)\big)+\big(x^2+o(x^2)\big)=3x^2+o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-3x)e^{3x}-(2x^2+1)\cos x}{2x\operatorname{sen}x+\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x^2+o(x^2)}{3x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6+\frac{o(x^2)}{x^2}}{3+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-2\,.$$

Il limite richiesto vale allora -2.

2. a. Il dominio è dato dagli $x\in\mathbb{R}$ per cui $x-1\neq 0$, ovvero $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^\pm}f(x)=\left[\frac{3}{0^\pm}\right]=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette né minimo né massimo assoluto.

b. Dallo studio in **a** si ricava subito che la retta $x=1$ è un asintoto verticale. Ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=1,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x-1}=1,$$

perciò la retta di equazione $y=x+1$ è un asintoto obliquo a $\pm\infty$.

c. Il numeratore è sempre positivo quindi la funzione è positiva se e solo se $x-1>0$ ovvero $x>1$. In particolare non si annulla mai.

d. La derivata prima è

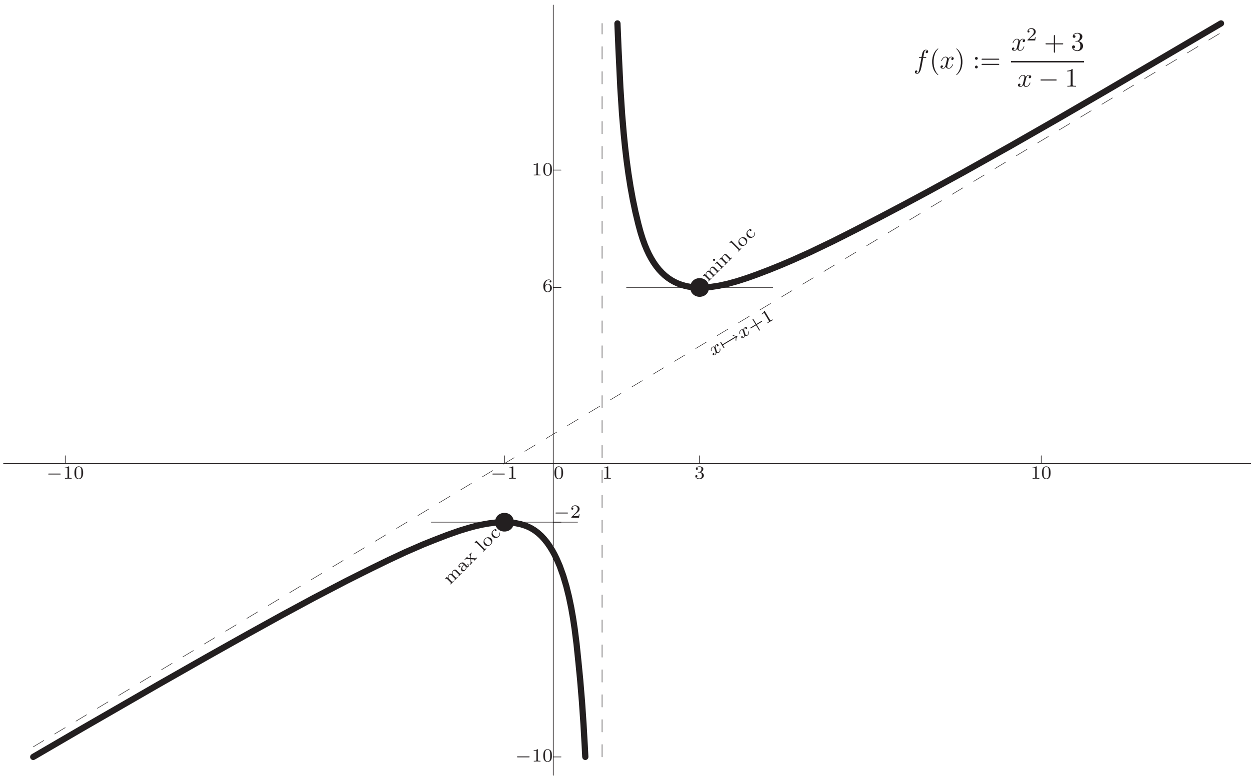
$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\,,$$

quindi $f'(x)\geq 0$ se e solo se $x^2-2x-3\geq 0$ ovvero se $x\leq -1$ oppure $x\geq 3$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty,-1[$ e su $]3,+\infty[$, decrescente su $]-1,1[$ e su $]1,3[$. In $x=-1$ e $x=3$ ammette rispettivamente un massimo e minimo relativo.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Si ha che $f''(x) > 0$ se e solo se $(x-1)^3 > 0$ ovvero se $x > 1$. La funzione è dunque concava su $]1,+\infty[$, convessa su $]-\infty,1[$.



3. Utilizzando il metodo per parti si ottiene

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int x\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + c$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che

$$a_n = \frac{2\sqrt{n^3} + 2\arctan n - n}{3\log n + 5n^2 + 2} \sim$$
$$\sim \frac{2n^{3/2}}{5n^2} = \frac{2}{5n^{1/2}},$$

che è il termine generale di una serie divergente perché $1/2 < 1$. Per il criterio di asintoticità anche la serie data diverge. I criteri del rapporto o della radice in questo caso portano a un limite 1, che non decide sulla convergenza o divergenza.

n	a_n	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	$a_n/(\frac{2}{5\sqrt{n}})$
1	0,3672566	0,3672566	0,9181
2	0,2438242	0,6110809	0,8620
3	0,1966444	0,8077253	0,8515
4	0,1700537	0,9777790	0,8503
5	0,1525278	1,1303068	0,8527
6	0,1398539	1,2701607	0,8564
7	0,1301163	1,4002770	0,8606
8	0,1223127	1,5225897	0,8649
9	0,1158637	1,6384535	0,8690
10	0,1104086	1,7488621	0,8729

b. Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{3^{(n^2)}}\Big)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^2}=+\infty,$$

dunque la serie diverge. La a_n cresce molto veloce.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	a_{n+1}/a_n
1	3,00	3,00	6,75
2	20,25	23,25	27,00
3	546,75	570,00	136,69
4	74733,89	75303,89	787,32
5	58839486,77	58914790,66	4920,75

5. a. Si ha che la serie è a termini alterni. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{1/n}=1\,,$$

cioè $a_n\sim 1/\sqrt{n^2}=1/n$, termine generale di una serie divergente, per il criterio di asintoticità, la serie data diverge assolutamente.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$\lvert a_{n+1}\rvert/(1/n)$
1	−0,3015	−0,3015	0,302
2	+0,3780	+0,0765	0,756
3	−0,4472	−0,3708	1,342
4	+0,4472	+0,0765	1,789
5	−0,3780	−0,3015	1,890
6	+0,3015	+0,0000	1,809
7	−0,2425	−0,2425	1,698
8	+0,2000	−0,0425	1,600
9	−0,1690	−0,2116	1,521
10	+0,1459	−0,0657	1,459

b. Si può applicare il criterio di Leibniz. Infatti $a_n>0$ per ogni n ed è una successione infinitesima. Resta da provare che vale $|a_n|\geq|a_{n+1}|$ per ogni n. Osserviamo che si può scrivere $|a_n|=f(n)$ dove $f(x)=(x^2-7x+17)^{-1/2}$. Basta allora verificare che f è una funzione decrescente almeno per tutti gli x sufficientemente grandi. Si ha

$$f'(x)=-\frac{2x-7}{2\sqrt{(x^2-7x+17)^3}}$$

che è negativa almeno per gli $x>7/2$. Dunque f è decrescente per $x\geq 7/2$, quindi $a_n\geq a_{n+1}$ per ogni $n\geq 4$.
Alternativamente si poteva ragionare nel modo seguente

$$a_n\geq a_{n+1}\iff\frac{1}{\sqrt{n^2-7n+17}}\geq\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-7(n+1)+17}}\iff$$
$$\sqrt{n^2-5n+11}\geq\sqrt{n^2-7n+17}\iff n^2-5n+11\geq n^2-7n+17\iff n\geq 3.$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente. Curiosità: la somma dei primi 6 addendi della serie fa esattamente 0.