Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, Tema A

Prova Scritta del 21 luglio 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e-x)+\tan x}{\operatorname{sen}(x^2-x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)+e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)-x\sqrt{1-x}+\operatorname{sen}x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+\arctan x+x^2}{\operatorname{sen}(2x)-\tan(2x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x-x^2)+2(\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\ln(1+x^2)+(x^2-x)\arctan x}$.

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{3x^2-12x}$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare l'integrale indefinito della funzione $g(x)=(9x^2+6x)\ln(1+x)$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-e^{-n}-n^3}{\operatorname{sen}(n\pi)+\sqrt{n}-(n-1)^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2-2x+1)^n}{(2n)!}$.

5. Della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\ln(n^2+n+1)-\ln(n^2+1)\Big)$$

a. si studi la convergenza semplice
b. e la convergenza assoluta.

Punti: 2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2, 4, 3+3, 3+3.

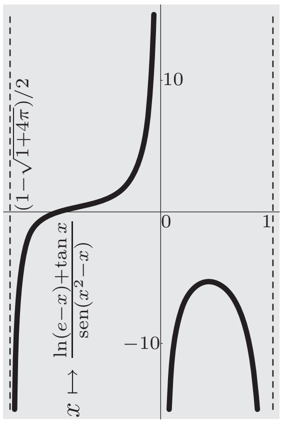
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

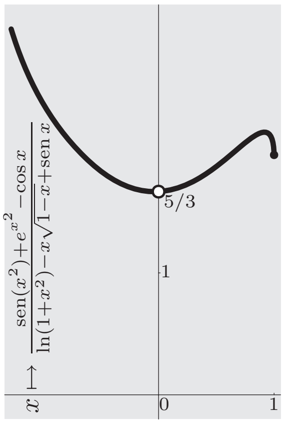
Analisi Matematica, compito A

Prova Scritta del 21 luglio 2003

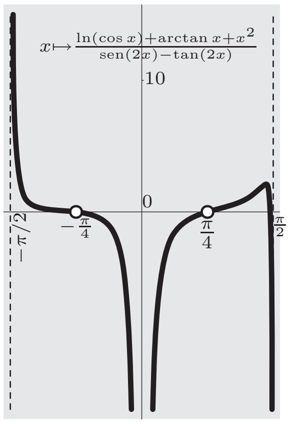
Svolgimento



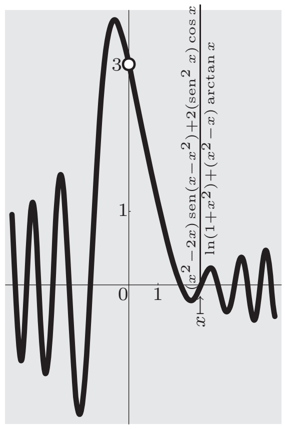
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Il limite si presenta nella forma [1/0]. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a 1 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo se $x^2 - x > 0$, il che accade quando $x < 0$ e $x > 1$. Quindi la funzione è negativa in un intorno destro di 0 e positiva in un intorno sinistro. Si conclude che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln(e-x)+\tan x}{\operatorname{sen}(x^2-x)} = \mp\infty\,,$$

dunque il limite completo non esiste.

b. Si può applicare de l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)+e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)-x\sqrt{1-x}+\operatorname{sen} x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+2xe^{x^2}+\operatorname{sen} x}{\frac{2x}{1+x^2}-\sqrt{1-x}+\frac{x}{2\sqrt{1-x}}+\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)-4x^2\operatorname{sen}(x^2)+2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\cos x}{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{x}{4\sqrt{(1-x)^3}}-\operatorname{sen} x} = \frac{2-0+2+0+1}{2+1+0-0} = \frac{5}{3}.$$

Alternativamente dopo la prima applicazione di de l'Hôpital si poteva procedere nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+2xe^{x^2}+\operatorname{sen} x}{\frac{2x}{1+x^2}-\sqrt{1-x}+\frac{x}{2\sqrt{1-x}}+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)+2e^{x^2}+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\frac{2}{1+x^2}+\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-x\frac{1-\cos x}{x^2}} =$$

$$= \frac{2+2+1}{2+1/2+1/2+0\cdot(1/2)} = \frac{5}{3},$$

essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{-x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{d(\sqrt{1+y})}{dy}(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}\,.$$

Oppure, alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen} x = x + o(x^2), \quad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2), \qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$
$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

si ha che gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x) = (x^2 + o(x^2)) + (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{5}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$\mathrm{Den}(x) = (x^2 + o(x^2)) - x\big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\big) + (x + o(x^2)) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2) - x\sqrt{1-x} + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{5/2 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{3/2 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{5}{3}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $\frac{5}{3}$.

c. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \arctan x + x^2}{\operatorname{sen}(2x) - \tan(2x)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{1+x^2} + 2x}{2\cos(2x) - \frac{2}{\cos^2(2x)}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\cos^2(2x)\, \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{1+x^2} + 2x}{2(\cos^3(2x) - 1)} \right) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

d. Conviene usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\arctan x = x + o(x^2), \quad \cos x = 1 + o(x), \quad \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o(x^3),$$
$$\operatorname{sen}^2 x = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3), \qquad \operatorname{sen}(x - x^2) = (x - x^2) + o\big((x-x^2)^2\big) = x - x^2 + o(x^2),$$

si ottiene

$$(\operatorname{sen}^2 x)\cos x = \big(x^2 + o(x^3)\big)(1 + o(x)) = x^2 + o(x^3),$$
$$(x^2 - 2x)\operatorname{sen}(x - x^2) = (x^2 - 2x)\big(x - x^2 + o(x^2)\big) = -2x^2 + 3x^3 + o(x^3),$$
$$(x^2 - x)\arctan x = (x^2 - x)\big(x + o(x^2)\big) = -x^2 + x^3 + o(x^3).$$

In definitiva gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x) = \big(-2x^2 + 3x^3 + o(x^3)\big) + 2\big(x^2 + o(x^3)\big) = 3x^3 + o(x^3),$$
$$\mathrm{Den}(x) = \big(x^2 + o(x^3)\big) + \big(-x^2 + x^3 + o(x^3)\big) = x^3 + o(x^3).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - 2x)\operatorname{sen}(x - x^2) + 2(\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\ln(1+x^2) + (x^2 - x)\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = 3\,.$$

Il limite richiesto vale allora 3. Alternativamente si sarebbe potuto usare de L'Hôpital tre volte consecutivamente.

2. a. Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $3x^2 - 12x \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \left[\frac{3}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 4^\pm} f(x) = \left[\frac{3}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione non ammette né minimo né massimo assoluto. Osserviamo infine che la funzione può essere scritta come

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2 - 4x}.$$

b. Dallo studio in a) si ricava subito che le rette $x = 4$ e $x = 0$ sono asintoti verticali, mentre la retta $y = 1/3$ è un asintoto orizzontale.

c. Il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ovvero $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$, mentre il denominatore è positivo se e solo se $x < 0$ oppure $x > 4$. Si conclude che

$$f(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x < 0 \text{ o } 1 < x < 3 \text{ o } x > 4, \\ = 0, & \text{se } x = 1 \text{ oppure } x = 3, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ o } 3 < x < 4. \end{cases}$$

d. La derivata prima è

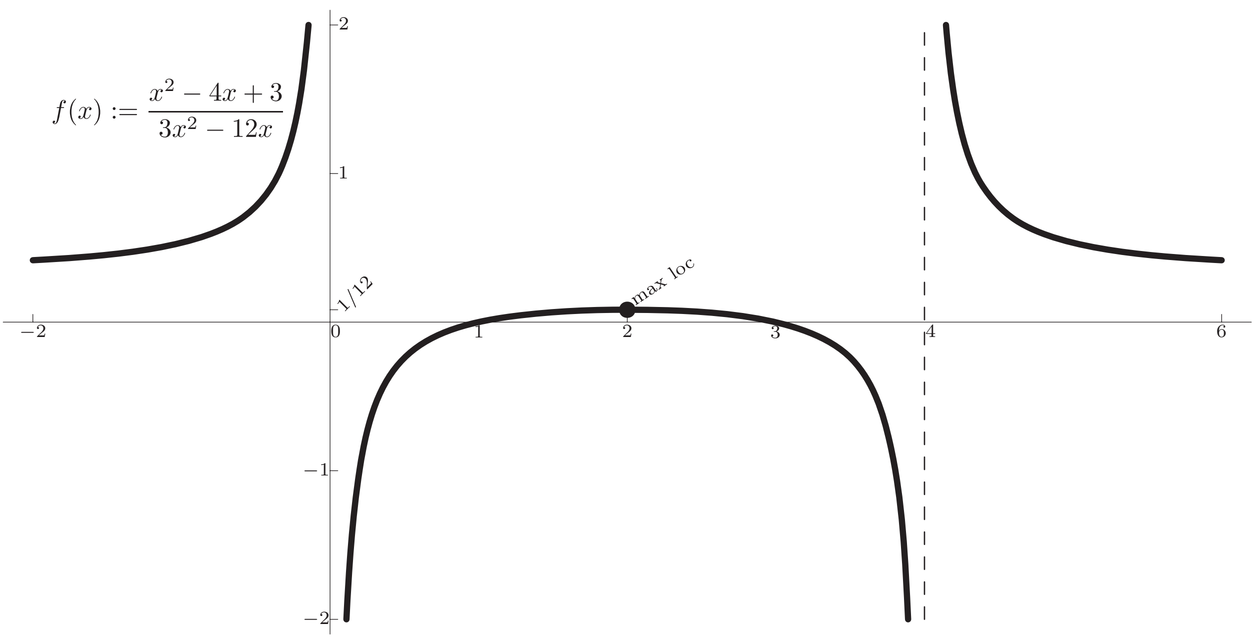
$$f'(x) = -\frac{2x - 4}{(x^2 - 4x)^2},$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2x - 4 \leq 0$ ovvero se $x \leq 2$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, 2[$, decrescente su $]2, 4[$ e su $]4, +\infty[$. In $x = 2$ ammette un massimo relativo.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 - 4x)^2 - (2x - 4)2(x^2 - 4x)(2x - 4)}{(x^2 - 4x)^4} = -\frac{2(x^2 - 4x) - 2(2x - 4)^2}{(x^2 - 4x)^3} =$$
$$= 2\frac{3x^2 - 12x + 16}{(x^2 - 4x)^3}.$$

Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha che $f''(x) > 0$ se e solo se $(x^2 - 4x)^3 > 0$ ovvero se $x < 0$ oppure $x > 4$. La funzione è dunque concava su $]0, 4[$, convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]4, +\infty[$.



3. Utilizzando il metodo per parti si ottiene

$$\int g(x)\,dx = (3x^3+3x^2)\ln(1+x) - \int (3x^3+3x^2)\frac{1}{1+x}\,dx =$$
$$= (3x^3+3x^2)\ln(1+x) - \int 3x^2\,dx = (3x^3+3x^2)\ln(1+x) - x^3 + c.$$

4. a. Poiché

$$a_n = \frac{3n - e^{-n} - n^3}{\operatorname{sen}(n\pi) + \sqrt{n} - (n-1)^2} = \frac{n^3(\frac{3}{n^2} - \frac{e^{-n}}{n^3} - 1)}{n^2(\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2} + n^{-3/2} - (1-1/n)^2)} \sim n\,,$$

abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Per il criterio necessario la serie non converge. Essendo a termini definitivamente positivi, diverge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	a_n/n
1	1,63	1,63	1,63
2	−5,16	−3,52	−2,58
3	7,96	4,44	2,65
4	7,43	11,87	1,86
5	7,99	19,86	1,60
6	8,78	28,64	1,46
7	9,65	38,29	1,38
8	10,57	48,86	1,32

b. Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(x-1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(x-1)^{2n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1,$$

dunque la serie converge per ogni $x\in\mathbb{R}$.

n	$a_n\ (x=3)$	$\sum_{k=0}^n a_k$	a_{n+1}/a_n
0	1,0000000	1,0000000	1,000
1	1,0000000	2,0000000	0,300
2	0,3000000	2,3000000	0,143
3	0,0428571	2,3428571	0,083
4	0,0035714	2,3464286	0,055
5	0,0001948	2,3466234	0,038
6	0,0000075	2,3466309	0,029
7	0,0000002	2,3466311	0,022

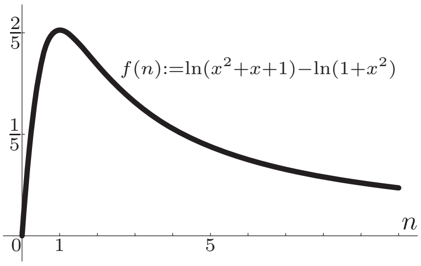
5. a. Si ha che la serie è a termini alterni. Inoltre

$$|a_n| = \ln\Big(\frac{n^2+n+1}{1+n^2}\Big) = \ln\Big(1+\frac{n}{1+n^2}\Big) = \frac{n}{1+n^2} + o\Big(\frac{n}{1+n^2}\Big) \sim \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}\,,$$

che è il termine generale di una serie divergente, quindi la serie data diverge assolutamente.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$\lvert a_n\rvert/(1/n)$	$\sum_{k=1}^n \lvert a_k\rvert$
1	−0,405	−0,405	0,405	0,405
2	0,336	−0,069	0,673	0,742
3	−0,262	−0,331	0,787	1,004
4	0,211	−0,120	0,845	1,216
5	−0,176	−0,296	0,879	1,392
6	0,150	−0,146	0,902	1,542
7	−0,131	−0,277	0,917	1,673
8	0,116	−0,161	0,929	1,789
9	−0,104	−0,265	0,937	1,893
10	0,094	−0,170	0,944	1,987

5. b. Si può applicare il criterio di Leibniz. Infatti $a_n > 0$ per ogni n ed è una successione infinitesima. Resta da provare che vale $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n. Osserviamo che si può scrivere $a_n = f(n)$ dove $f(x) = \ln(x^2+x+1) - \ln(1+x^2)$. Basta allora verificare che f è una funzione decrescente almeno per tutti gli x sufficientemente grandi. Si ha



$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,,$$

che è negativa almeno per gli $x > 1$. Dunque f è decrescente per $x\geq 1$, quindi a_n è decrescente. Per il criterio di Leibniz la serie data converge semplicemente.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, Tema B

Prova Scritta del 21 luglio 2003

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x) + e^{2x} - \cos x}{\operatorname{sen} x - \tan x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x^2 - x)\operatorname{sen}(x - x^2) + (\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\ln(1 + x^2) + (x^2 - x)\arctan x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(e + x) + \operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen}(x^2 - x)}$, (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2) + e^{x^2} - \ln(e + x^2)}{\ln(1 + 2x^2) - x + \operatorname{sen} x}$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{3x^2 + 12x}$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare l'integrale indefinito della funzione $g(x) = (9x^2 - 6x)\ln(1 - x)$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + e^{-n} + n^2}{\cos(n\pi) + \sqrt{n} + (n + 1)^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 - x)^n}{(2n + 1)!}$.

5. Della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\ln(1 + n^2) - \ln(n^2 + n + 1)\Big)$$

a. si studi la convergenza semplice
b. e la convergenza assoluta.

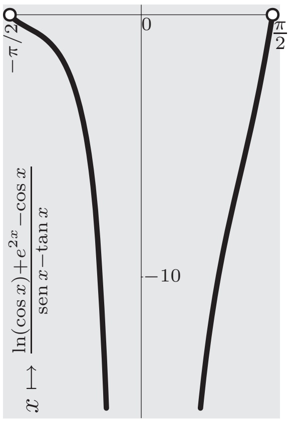
Punti: 2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2, 4, 3+3, 3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

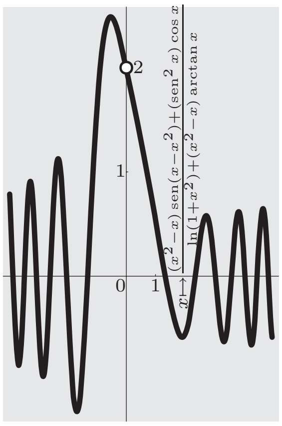
Analisi Matematica, compito B

Prova Scritta del 21 luglio 2003

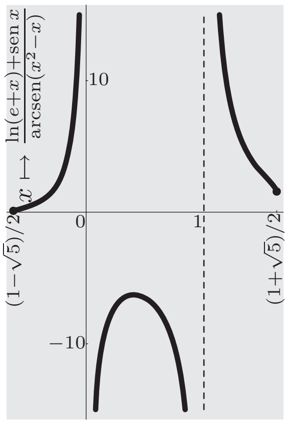
Svolgimento



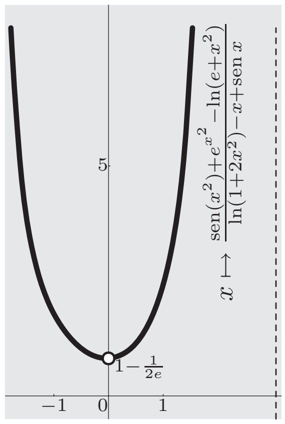
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+e^{2x}-\cos x}{\operatorname{sen} x-\tan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+2e^{2x}+\operatorname{sen} x}{\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x\cos x+(2e^{2x}+\operatorname{sen} x)\cos^2 x}{\cos^3 x-1}=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty.$$

b. Conviene usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\arctan x = x+o(x^2),\quad \cos x = 1+o(x),\quad \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^2+o(x^3),$$
$$\operatorname{sen}^2 x=(x+o(x^2))^2=x^2+o(x^3),\qquad \operatorname{sen}(x-x^2)=(x-x^2)+o\big((x-x^2)^2\big)=x-x^2+o(x^2),$$

si ottiene

$$(\operatorname{sen}^2 x)\cos x=\big(x^2+o(x^3)\big)(1+o(x))=x^2+o(x^3),$$
$$(x^2-x)\operatorname{sen}(x-x^2)=(x^2-x)\big(x-x^2+o(x^2)\big)=-x^2+2x^3+o(x^3),$$
$$(x^2-x)\arctan x=(x^2-x)\big(x+o(x^2)\big)=-x^2+x^3+o(x^3).$$

In definitiva gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x)=\big(-x^2+2x^3+o(x^3)\big)+\big(x^2+o(x^3)\big)=2x^3+o(x^3),$$
$$\mathrm{Den}(x)=\big(x^2+o(x^3)\big)+\big(-x^2+x^3+o(x^3)\big)=x^3+o(x^3).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)\operatorname{sen}(x-x^2)+(\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\ln(1+x^2)+(x^2-x)\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=2\,.$$

Il limite richiesto vale allora 2. Alternativamente si sarebbe potuto usare de L'Hôpital tre volte consecutivamente.

c. Il limite si presenta nella forma $[\frac{1}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a 1 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo se $x^2 - x > 0$, il che accade quando $x < 0$ e $x > 1$. Quindi la funzione è negativa in un intorno destro di 0 e positiva in un intorno sinistro. Si conclude che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln(e+x) + \operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen}(x^2 - x)} = \mp\infty\,,$$

dunque il limite completo non esiste.

d. Si può applicare de l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + e^{x^2} - \ln(e+x^2)}{\ln(1+2x^2) - x + \operatorname{sen} x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2) + 2xe^{x^2} - \frac{2x}{e+x^2}}{\frac{4x}{1+2x^2} - 1 + \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2) + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - \frac{2(e+x^2)-4x^2}{(e+x^2)^2}}{\frac{4(1+2x^2)-16x^2}{(1+2x^2)^2} - \operatorname{sen} x} = \frac{2+0+2+0-\frac{2}{e}}{4-0} =$$

$$= \frac{2e-1}{2e}.$$

Alternativamente dopo la prima applicazione di de l'Hôpital si poteva procedere nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2) + 2xe^{x^2} - \frac{2x}{e+x^2}}{\frac{4x}{1+2x^2} - 1 + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2) + 2e^{x^2} - \frac{2}{e+x^2}}{\frac{4}{1+2x^2} - x\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2+2-\frac{2}{e}}{4-0\cdot(1/2)} = \frac{2e-1}{2e}\,.$$

Oppure, alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen} x = x + o(x^2), \quad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2),$$
$$\ln(1+2x^2) = 2x^2 + o(x^2), \qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$
$$\ln(e+x^2) = \ln e + \ln\left(1+\frac{x^2}{e}\right) 1 + \left(\frac{x^2}{e} + o\left(\frac{x^2}{e}\right)\right) 1 + \frac{x^2}{e} + o(x^2),$$

si ha che gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x) = (x^2 + o(x^2)) + (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 + \frac{x^2}{e} + o(x^2)) = \frac{2e-1}{e}x^2 + o(x^2),$$
$$\mathrm{Den}(x) = (2x^2 + o(x^2)) - x + (x + o(x^2)) = 2x^2 + o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + e^{x^2} - \ln(e+x^2)}{\ln(1+2x^2) - x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2e-1}{e}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2e-1}{e} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{2 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{2e-1}{2e}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $\frac{2e-1}{2e}$.

2. a. Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $3x^2 + 12x \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \left[\frac{-3}{0^\pm}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to(-4)^\pm} f(x) = \left[\frac{-3}{0^\mp}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\,.$$

Quindi la funzione non ammette né minimo né massimo assoluto. Osserviamo infine che la funzione può essere scritta come

$$f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2+4x}\,.$$

b. Dallo studio in a) si ricava subito che le rette $x = -4$ e $x = 0$ sono asintoti verticali, mentre la retta $y = -1/3$ è un asintoto orizzontale.

c. Il numeratore è ≥ 0 quando $x^2+4x+3 \leq 0$ ovvero $x \in [-3,-1]$, mentre il denominatore è positivo se e solo se $x < -4$ oppure $x > 0$. Si conclude che

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x < -4 \text{ o } -3 < x < -1 \text{ o } x > 0, \\ = 0, & \text{se } x = -3 \text{ oppure } x = -1, \\ > 0, & \text{se } -4 < x < -3 \text{ o } -1 < x < 0. \end{cases}$$

d. La derivata prima è

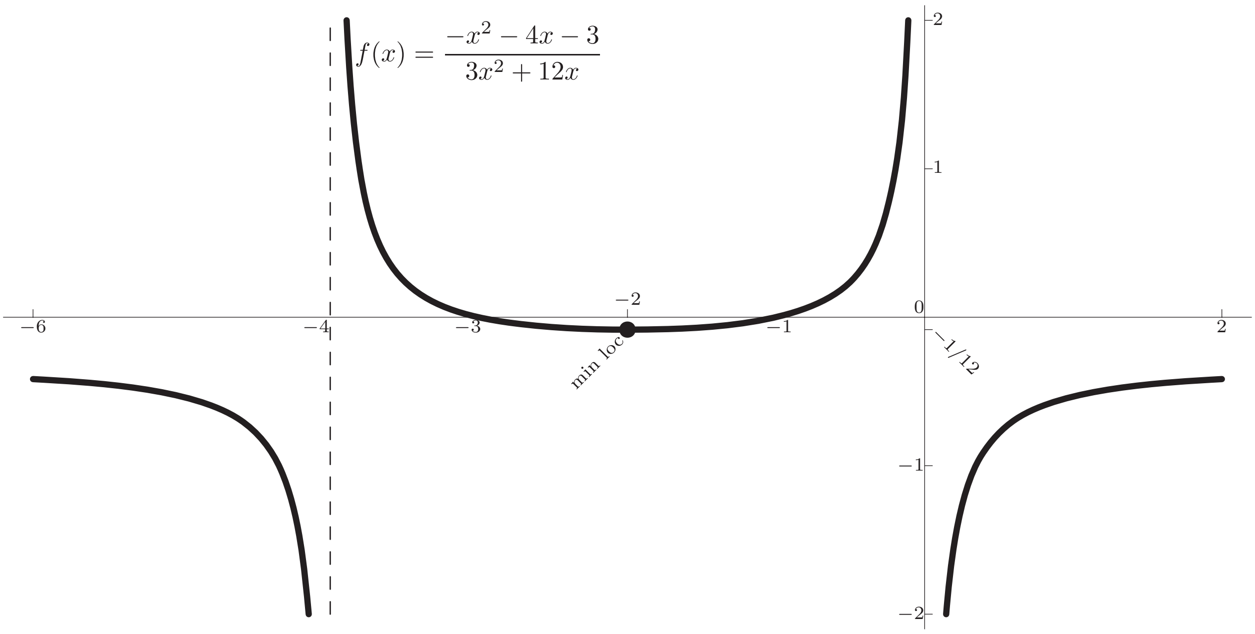
$$f'(x) = \frac{2x+4}{(x^2+4x)^2}\,,$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2x+4 \geq 0$ ovvero se $x \geq -2$. La funzione è dunque decrescente su $]-\infty,-4[$ e su $]-4,-2[$, crescente su $]-2,0[$ e su $]0,+\infty[$. In $x=-2$ ammette un minimo relativo.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(x^2+4x)^2 - (2x+4)2(x^2+4x)(2x+4)}{(x^2+4x)^4} = \frac{2(x^2+4x) - 2(2x+4)^2}{(x^2+4x)^3} =$$
$$= -2\frac{3x^2+12x+16}{(x^2+4x)^3}.$$

Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha che $f''(x) > 0$ se e solo se $(x^2+4x)^3 < 0$ ovvero se $x \in]-4,0[$. La funzione è dunque convessa su $]-4,0[$, concava su $]-\infty,-4[$ e su $]0,+\infty[$.



3. Utilizzando il metodo per parti si ottiene

$$\int g(x)\,dx = (3x^3-3x^2)\ln(1-x) - \int (3x^3-3x^2)\left(-\frac{1}{1-x}\right)dx =$$
$$= (3x^3-3x^2)\ln(1-x) - \int 3x^2\,dx = (3x^3-3x^2)\ln(1-x) - x^3 + c.$$

4. a. Poiché

$$a_n = \frac{2n + e^{-n} + n^2}{\cos(n\pi) + \sqrt{n} + (n+1)^2} = \\ = \frac{n^2(\frac{2}{n} + \frac{e^{-n}}{n^2} + 1)}{n^2(\frac{\cos n\pi}{n^2} + n^{-3/2} + (1+\frac{1}{n})^2)} \sim \\ \sim 1\,,$$

per il criterio necessario la serie non converge. Essendo a termini positivi diverge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$
1	0,842	0,842
2	0,713	1,555
3	0,899	2,454
4	0,858	3,312
5	0,940	4,252
6	0,915	5,167
7	0,960	6,127
8	0,943	7,070

b. Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(x^2-x)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} \frac{(2n+1)!}{(x^2-x)^n} \right) = \\ = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2-x}{(2n+3)(2n+2)} = \\ = 0 < 1,$$

dunque la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

n	a_n $(x=3)$	$\sum_{k=0}^n a_k$	a_{n+1}/a_n
0	1,0000000	1,0000000	1,000
1	1,0000000	2,0000000	0,300
2	0,3000000	2,3000000	0,143
3	0,0428571	2,3428571	0,083
4	0,0035714	2,3464286	0,055
5	0,0001948	2,3466234	0,038
6	0,0000075	2,3466309	0,029
7	0,0000002	2,3466311	0,022

5. a. Si ha che la serie è a termini alterni. Inoltre

$$|a_n| = \left| -\ln\left(\frac{n^2+n+1}{1+n^2}\right)\right| = \\ = \ln\left(1 + \frac{n}{1+n^2}\right) \\ = \frac{n}{1+n^2} + o\left(\frac{n}{1+n^2}\right) \sim \\ \sim \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}\,,$$

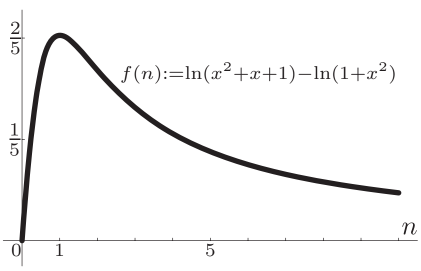
che è il termine generale di una serie divergente, quindi la serie data diverge assolutamente.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$\lvert a_n\rvert/(1/n)$	$\sum_{k=1}^n \lvert a_k\rvert$
1	0,405	0,405	0,405	0,405
2	−0,336	0,069	0,673	0,742
3	0,262	0,331	0,787	1,004
4	−0,211	0,120	0,845	1,216
5	0,176	0,296	0,879	1,392
6	−0,150	0,146	0,902	1,542
7	0,131	0,277	0,917	1,673
8	−0,116	0,161	0,929	1,789
9	0,104	0,265	0,937	1,893
10	−0,094	0,170	0,944	1,987

5. b. Per la proprietà di linearità si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\ln(1+n^2) - \ln(n^2+n+1) \Big) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{n}{1+n^2}\right) =: -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n\,.$$

Alla serie a secondo membro si può applicare il criterio di Leibniz. Infatti $b_n > 0$ per ogni n ed è una successione infinitesima. Resta da provare che vale $b_n \geq b_{n+1}$ per ogni n. Osserviamo che si può scrivere $b_n = f(n)$ dove $f(x) = \ln(x^2+x+1) - \ln(1+x^2)$. Basta allora verificare che f è una funzione decrescente almeno per tutti gli x sufficientemente grandi. Si ha



$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,,$$

che è negativa almeno per gli $x > 1$. Dunque f è decrescente per $x \geq 1$, quindi b_n è decrescente. Per il criterio di Leibniz la serie data converge semplicemente.