Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 9 luglio 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x-\ln(1+7x)}{e^{3x}-\cos(5x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{\ln(2x-x^2)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(1+e^{-x})}{\ln(3-\frac{2}{x})-1}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(2x)-x\,\mathrm{sen}(3x-x^2)}{2\ln(1+x)-2\arctan x+x^2}$.

2. Data la funzione $f(x)=x(3-\ln^2 x)$ si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio;
b. gli eventuali asintoti;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare l'integrale indefinito della funzione $g(x)=e^{2-x}(x^2-3x+5)$.

4. Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10-5n+n^2}{3n^5+2n^3+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}e^{1-3n}$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x}\right)$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello 0, di livello $\ln 2$, di livello $\ln(1/2)$, e in generale di livello k.

Compito A

Punti: 2+2+2+3, 2+2+2+2+2+2, 4, 3+3, 6.

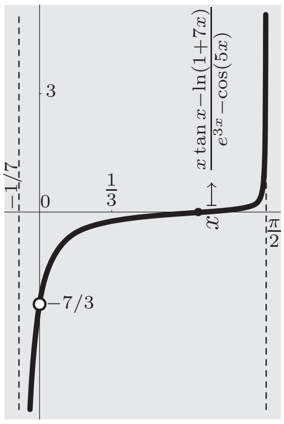
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

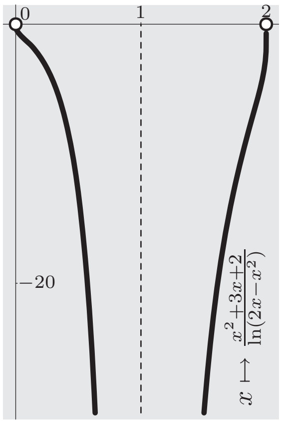
Analisi Matematica

Prova Scritta del 9 luglio 2003

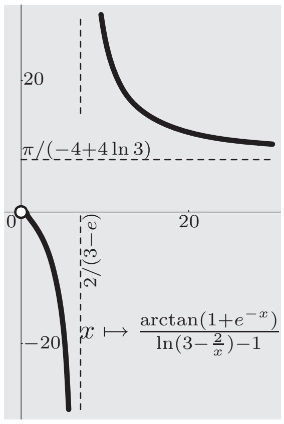
Svolgimento



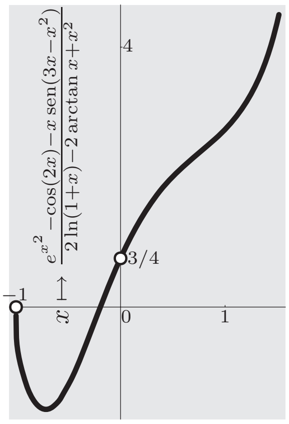
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x-\ln(1+7x)}{e^{3x}-\cos(5x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{7}{1+7x}}{3e^{3x}+5\,\mathrm{sen}(5x)}=\frac{0-0-7}{3+0}=-\frac{7}{3}\,.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\tan x = x+o(x),\qquad \ln(1+7x)=7x+o(x),\qquad e^{3x}=1+3x+o(x),\qquad \cos(5x)=1+o(x)\,,$$

si ottiene

$$x\tan x = x(x+o(x))=o(x)\,.$$

In definitiva gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono

$$\mathrm{Num}(x)=o(x)-(7x+o(x))=-7x+o(x),\quad \mathrm{Den}(x)=1+3x+o(x)-(1+o(x))=3x+o(x)\,.$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x-\ln(1+7x)}{e^{3x}-\cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x+o(x)}{3x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-7+\frac{o(x)}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}}=-\frac{7}{3}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $-7/3$.

b. Il limite si presenta nella forma $[\frac{6}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x=1$. Il numeratore tende a 6 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 1. Il denominatore è sempre negativo, infatti, $2x-x^2<1$ per ogni $x\neq 1$, e quindi $\ln(2x-x^2)<0$. Allora la funzione è negativa in un intorno di 1 e si conclude che

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{\ln(2x-x^2)}=\left[\frac{6}{0^-}\right]=-\infty\,.$$

c. Il limite non è in forma indeterminata e vale
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(1+e^{-x})}{\ln(3-\frac{2}{x})-1}=\frac{\arctan(1+0)}{\ln(3-0)-1}=\frac{\pi}{4(\ln 3-1)}\,.$$

d. Il limite potrebbe essere risolto utilizzando de l'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0). In questo caso è però preferibile usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3:
$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^4),\quad \cos(2x)=1-\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^3)=1-2x^2+o(x^3),$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$
$$\operatorname{sen}(3x-x^2)=(3x-x^2)+o((3x-x^2)^2)=3x-x^2+o(x^2),$$
per cui
$$x\operatorname{sen}(3x-x^2)=x\big(3x-x^2+o(x^2)\big)=3x^2-x^3+o(x^3)\,.$$
In definitiva gli sviluppi del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ e del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ sono
$$\mathrm{Num}(x)=(1+x^2+o(x^4))-(1-2x^2+o(x^3))-(3x^2-x^3+o(x^3))=x^3+o(x^3),$$
$$\mathrm{Den}(x)=2(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))-2(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))+x^2=\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$
Il limite è allora
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos(2x)-x\operatorname{sen}(3x-x^2)}{2\ln(1+x)-2\arctan x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}{4/3+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{3}{4}\,.$$
Il limite richiesto vale allora 3/4.

2. a. Il dominio è dato da $\mathcal{D}=\,]0,+\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\,.$$
Quindi la funzione non ammette minimo assoluto.

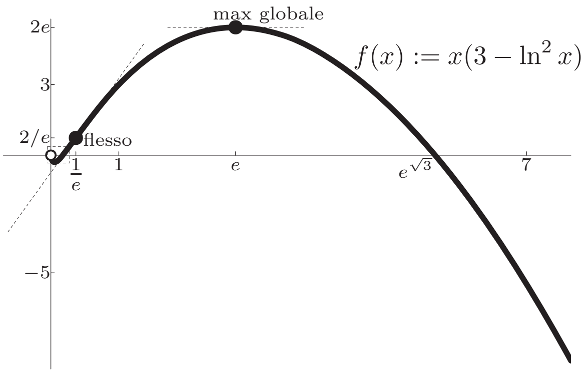
b. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(3-\ln^2 x)=-\infty\,,$$
perciò la funzione non ammette asintoti.

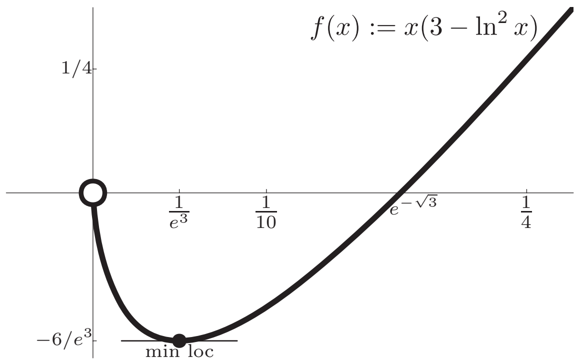
c. La funzione è ≥ 0 se e solo se $3-\ln^2 x\geq 0$, ovvero $-\sqrt{3}\leq\ln x\leq\sqrt{3}$ cioè $e^{-\sqrt{3}}\leq x\leq e^{\sqrt{3}}$. Più precisamente la funzione si annulla in $x_1=e^{-\sqrt{3}}$ e in $x_2=e^{\sqrt{3}}$.

d. La derivata prima è
$$f'(x)=(3-\ln^2 x)+x\frac{-2\ln x}{x}=-(\ln^2 x+2\ln x-3)\,.$$
Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $t^2+2t-3=0$ sono -3 e 1, perciò, ristretti al dominio, si ha che $f'(x)\geq 0$ se e solo se $-3\leq\ln x\leq 1$ ovvero se $e^{-3}\leq x\leq e$. La funzione è dunque crescente su $]e^{-3},e[$, decrescente su $]0,e^{-3}[$ e su $]e,+\infty[$. In $x_3=e^{-3}$ e $x_4=e$ ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo. Si osservi inoltre che
$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=-\infty\,.$$

e. La derivata seconda è
$$f''(x)=-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}=-2\frac{\ln x+1}{x}\,.$$
Si ha che $f''(x)\geq 0$ se e solo se $\ln x+1\leq 0$ ovvero se $x\leq e^{-1}$. La funzione è dunque convessa su $]0,e^{-1}[$ e concava su $]e^{-1},+\infty[$. In $x_5=e^{-1}$ ammette un punto di flesso.

f. La figura a destra è l'ingrandimento del rettangolino attorno all'origine nella figura a sinistra.





3. Utilizzando il metodo per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= -e^{2-x}(x^2-3x+5) - \int (-e^{2-x})(2x-3)\,dx = \\ &= -e^{2-x}(x^2-3x+5) + \int e^{2-x}(2x-3)\,dx = \\ &= -e^{2-x}(x^2-3x+5) + \left(-e^{2-x}(2x-3) - \int (-e^{2-x})2\,dx\right) = \\ &= -e^{2-x}(x^2-3x+5) - e^{2-x}(2x-3) - 2e^{2-x} + c = -e^{2-x}(x^2-x+4) + c.\end{aligned}$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{10-5n+n^2}{3n^5+2n^3+1} = \\ &= \frac{n^2(\frac{10}{n^2} - \frac{5}{n} + 1)}{n^5(3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5})} \sim \\ &\sim \frac{n^2}{3n^5} = \frac{1}{3n^3}\,,\end{aligned}$$

che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data converge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$a_n/(1/(3n^3))$
1	1,00000	1,00000	3,00
2	0,03540	1,03540	0,85
3	0,00510	1,04050	0,41
4	0,00187	1,04237	0,36
5	0,00104	1,04341	0,39
6	0,00067	1,04409	0,44
7	0,00047	1,04456	0,48
8	0,00034	1,04490	0,53

b. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{1-3n}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} e^{(1-3n)/n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^2 e^{(1/n)-3} = \\ &= e^2 e^{-3} = 1/e < 1,\end{aligned}$$

dunque la serie converge.

n	a_n	$\sum_{k=1}^n a_k$	$\sqrt[n]{a_n}$
1	0,40601	0,40601	0,41
2	0,10781	0,51381	0,33
3	0,03329	0,54710	0,32
4	0,01097	0,55807	0,32
5	0,00374	0,56181	0,33
6	0,00130	0,56312	0,33
7	0,00046	0,56357	0,33
8	0,00016	0,56374	0,34

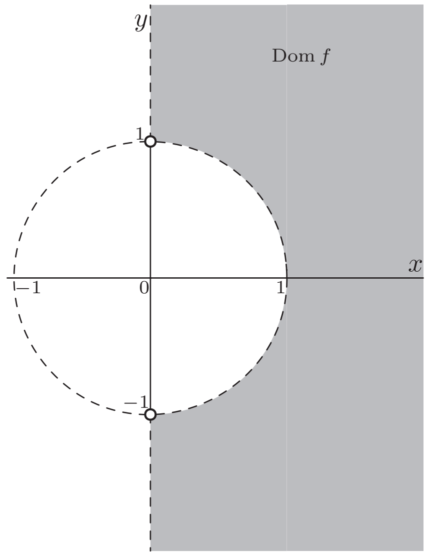
5. a. Il dominio si ottiene imponendo che l'argomento della radice sia ≥ 0, che il denominatore sia $\neq 0$ e che l'argomento del logaritmo sia > 0:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x} > 0\,. \end{cases}$$

Il numeratore della frazione è ≥ 0 per la prima disuguaglianza. Quindi la frazione è > 0 se e solo se entrambi il numeratore e il denominatore sono > 0, cosa che ingloba anche la seconda disequazione $x \neq 0$. In definitiva, il dominio di f è

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ x^2 + y^2 > 1\right\},$$

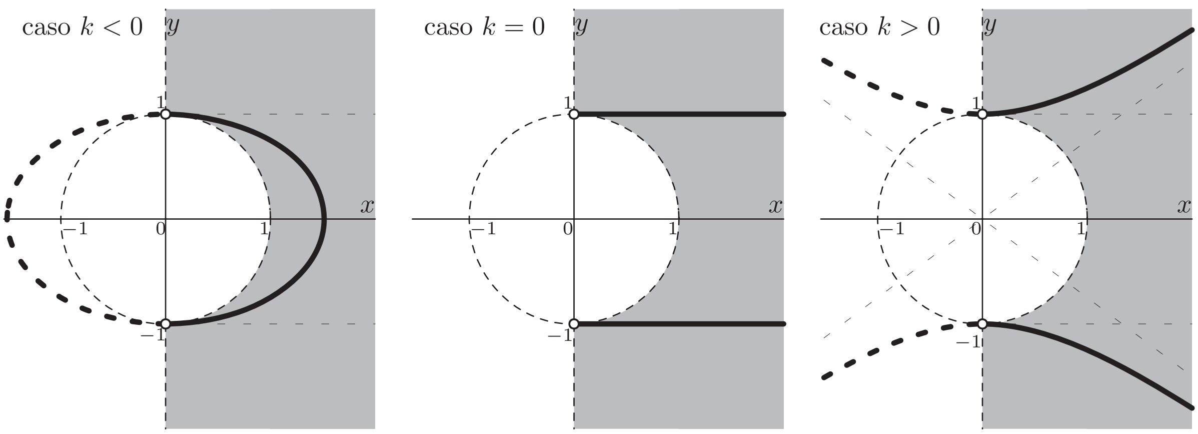
che geometricamente è rappresentato dal semipiano $x > 0$ privato di mezzo disco di centro $(0,0)$ e raggio unitario. Il bordo del disco non è compreso nel dominio.

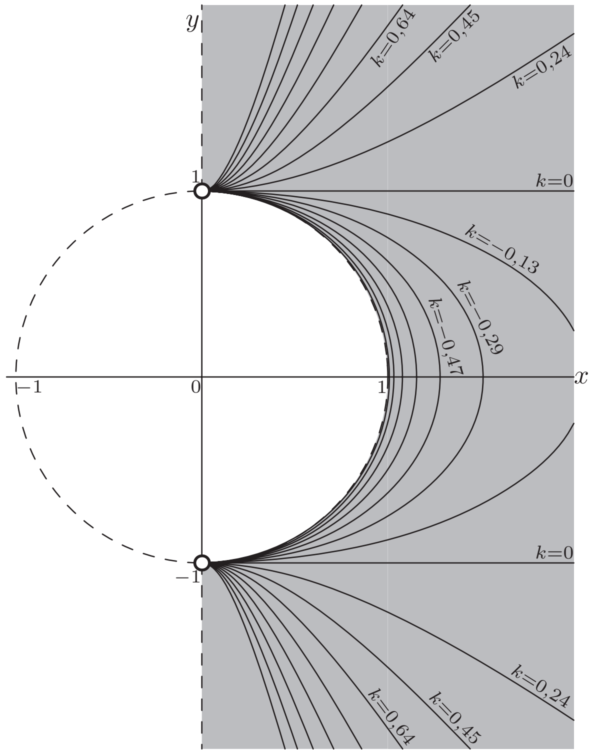


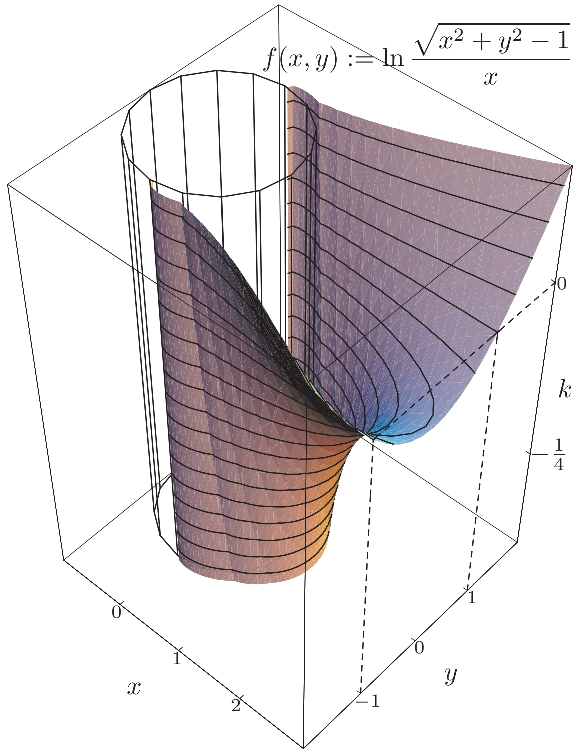
b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$:

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x}\right) = k \qquad \iff \qquad \sqrt{x^2+y^2-1} = e^k x$$
$$\iff \qquad x^2 + y^2 - 1 = e^{2k}x^2 \qquad \iff \qquad (1-e^{2k})x^2 + y^2 = 1.$$

Si distinguono tre casi: se $k = 0$ allora $1 - e^0 = 0$ e l'insieme di livello è $y^2 = 1$ che, intersecato col dominio, è l'unione delle due semirette $y = 1$ e $y = -1$.
Se $k > 0$, allora $1 - e^{2k} < 0$ e l'insieme di livello rappresenta una parte di iperbole.
Se $k < 0$, allora $1 - e^{2k} > 0$ e l'insieme di livello rappresenta una parte di ellisse.
In particolare la linea di livello $\ln 2$ appartiene al terzo caso, quella di livello $\ln(1/2)$ al secondo.




y
x
1
−1
0
1
−1
k=0,64
k=0,45
k=0,24
k=0
k=−0,13
k=−0,29
k=−0,47
k=0
k=0,24
k=0,64
k=0,45


$f(x,y) := \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x}$
0
k
$-\frac{1}{4}$
0
1
2
x
−1
0
1
y