Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, Tema A

Compitino del 24 giugno 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{1+5x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2(x) = 3x\sqrt[3]{x} + 5\cos(2x)\,.$$

2. Calcolare, utilizzando due volte il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x) = (3x+7)\ln^2(x)$.

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,$$

4. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - n\sqrt{n} + 7}{2n^3 - 12\log n + 3}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}(\arctan n)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - e^{-3n}}{3e^n + 5e^{-2n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{(n+1)!}$.

5. Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^2 - 5n + 10)}\,,$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;
b) provare che la serie diverge assolutamente.

6. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \arctan(\ln(x^2+2x+y^2)-4)$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

7. Descrivere geometricamente il dominio e determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \ln(x+y+2) - (x+2)(y-1)$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punti: 2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 3, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 24 giugno 2003

Svolgimento

1.

$$\int \frac{1+5x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - 5\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x - 5\sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int 3x\sqrt[3]{x} + 5\cos(2x)\,dx = 3\int x^{4/3}\,dx + \frac{5}{2}\int 2\cos(2x)\,dx = \frac{9}{7}x^{7/3} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}(2x) + c.$$

2. Applicando due volte il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (3x+7)\ln^2(x)\,dx &= \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\ln^2 x - \int \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\frac{2\ln x}{x}\,dx = \\ &= \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\ln^2 x - \int (3x+14)\ln x\,dx = \\ &= \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\ln^2 x - \Big[\Big(\frac{3}{2}x^2+14x\Big)\ln x - \int \Big(\frac{3}{2}x^2+14x\Big)\frac{1}{x}\,dx\Big] = \\ &= \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\ln^2 x - \Big(\frac{3}{2}x^2+14x\Big)\ln x + \int \Big(\frac{3}{2}x+14\Big)\,dx = \\ &= \Big(\frac{3}{2}x^2+7x\Big)\ln^2 x - \Big(\frac{3}{2}x^2+14x\Big)\ln x + \frac{3}{4}x^2 + 14x + c.\end{aligned}$$

3. Si ha che $x = t^2$, quindi $dx = 2t\,dt$, per cui

$$\int \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{2t+3}{t+1}2t\,dt = \int \frac{4t^2+6t}{t+1}\,dt$$

Dalla divisione dei polinomi $4t^2+6t$ e $t+1$ si ottiene $4t^2+6t = (4t+2)(t+1)-2$, perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{4t^2+6t}{t+1}\,dt &= \int \Big(4t+2-\frac{2}{t+1}\Big)\,dt = \int (4t+2)\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = \\ &= 2t^2+2t-2\ln|t+1| + c = 2x + 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.\end{aligned}$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{-n\sqrt{n}}{2n^3} = -1/2n^{3/2}$ che è il termine generale di una serie convergente poiché $3/2 > 1$. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

b. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-2n}(\arctan n)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{e^2} = \frac{\pi}{2e^2} < 1\,.$$

Dunque la serie converge.

c. Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - e^{-3n}}{3e^n + 5e^{-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-4n}}{3+5e^{-3n}} = \frac{1}{3} \neq 0\,,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

d. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{2^{3(n+1)-1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{2^{3n-1}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^3}{n+2} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

5. a. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto $a_n = \frac{1}{\ln(n^2-5n+10)}$ si ha $a_n > 0$ se e solo se $\ln(n^2-5n+10) > 0$ ovvero $n^2 - 5n + 10 > 1$. Quest'ultima relazione è sempre vera (come si può vedere verificando che il discriminante dell'equazione di secondo grado è negativo). Inoltre il termine generale è banalmente infinitesimo. Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-5x+10)}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2(x^2-5x+10)} \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x+10} = \frac{5-2x}{(x^2-5x+10)\ln^2(x^2-5x+10)}.$$

Poiché $x^2-5x+10 > 0$ per ogni x, il denominatore è sempre positivo, quindi $f'(x) \leq 0$ se e solo se $5-2x \leq 0$ ovvero se $x \geq 5/2$. Quindi la funzione f è decrescente per ogni $x \geq 5/2$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 3$.
Alternativamente, utilizzando la monotonia del logaritmo e il fatto che $a_n > 0$,

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{\ln(n^2-5n+10)} \geq \frac{1}{\ln((n+1)^2-5(n+1)+10)} \iff$$
$$\ln(n^2-3n+6) \geq \ln(n^2-5n+10) \iff n^2-3n+6 \geq n^2-5n+10 \iff n \geq 2.$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge.

b. Si osserva che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-5x+10)}{x} = 0$$

(si può utilizzare il Teorema di de l'Hôpital). Di conseguenza per tutti gli x sufficientemente grandi si avrà $\ln(x^2-5x+10) < x$ e quindi, per tutti gli n sufficientemente grandi

$$\frac{1}{\ln(n^2-5n+10)} > \frac{1}{n}.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n$ è divergente, per il criterio del confronto, anche la serie data diverge assolutamente.

6. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \ x^2+2x+y^2 > 0\} = \{(x,y) : \ (x+1)^2+y^2 > 1\}.$$

Il dominio è dunque la regione di piano esterna alla circonferenza di equazione $(x+1)^2+y^2 = 1$, di centro $C = (-1,0)$ e raggio $R = 1$.
L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| \geq \pi/2$ tale insieme è vuoto (poiché l'arcotangente assume valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$), altrimenti equivale a $\ln(x^2+2x+y^2)-4 = \tan k$ ovvero $x^2+2x+y^2 = e^{4+\tan k}$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio $R_k = \sqrt{1+e^{4+\tan k}}$. Al variare di $k \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(-1,0)$ e raggio $R_k > 1$ crescente al crescere di k.

7. Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x,y) : \ x+y+2 > 0\}$ e rappresenta un semipiano.
I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y+2} - (y-1) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y+2} - (x+2) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x+y+2} = y-1, \\[2ex] \dfrac{1}{x+y+2} = x+2. \end{cases}$$

Dalle due equazioni si ricava $y-1=x+2$ ovvero $y=x+3$ che sostituito nella seconda fornisce

$$\frac{1}{x+(x+3)+2}=x+2 \quad\Longleftrightarrow\quad 1=(x+2)(2x+5) \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^2+9x+9=0\,.$$

L'equazione di secondo grado ha come soluzioni $x_1=-3/2$, $x_2=-3$ per cui le soluzioni del sistema sono $P_1=(-3/2,3/2)$, $P_2=(-3,0)$. Il punto P_2 non appartiene al dominio di definizione della funzione, dunque P_1 è l'unico punto critico di f.
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y+2)^2}\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x+y+2)^2}\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(x+y+2)^2}-1\,,$$

perciò l'Hessiano nel punto P_1 è

$$H(-3/2,3/2)=\begin{vmatrix}-1/4 & -5/4\\ -5/4 & -1/4\end{vmatrix}=-3/2\,.$$

Essendo $H(-3/2,3/2)<0$ si ottiene che P_1 è un punto di sella.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 24 giugno 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{3-4x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2(x) = 3x\sqrt{x} - 3\,\mathrm{sen}(2x)\,.$$

2. Calcolare, utilizzando due volte il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x) = (5x-2)\ln^2(x)$.

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\,dx\,,$$

4. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n\sqrt{n}+2\log n+1}{4n^{7/2}+n^4+5}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right)\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}-e^{-3n}}{e^{2n}+3e^{-n}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(n+1)!}$.

5. Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^2-7n+16)}\,.$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;
b) provare che la serie diverge assolutamente.

6. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \arctan(\ln(x^2-2x+y^2)-1)$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

7. Descrivere geometricamente il dominio e determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \ln(x+y-1)-(x-3)(y+1)$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punti: 2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 3, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 24 giugno 2003

Svolgimento

1.

$$\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\operatorname{arcsen} x + 4\sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int 3x\sqrt{x} - 3\operatorname{sen}(2x)\,dx = 3\int x^{3/2}\,dx + \frac{3}{2}\int 2(-\operatorname{sen}(2x))\,dx = \frac{6}{5}x^{5/2} + \frac{3}{2}\cos(2x) + c.$$

2. Applicando due volte il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (5x-2)\ln^2(x)\,dx &= \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\ln^2 x - \int \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\frac{2\ln x}{x}\,dx = \\ &= \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\ln^2 x - \int (5x-4)\ln x\,dx = \\ &= \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\ln^2 x - \Big[\Big(\frac{5}{2}x^2 - 4x\Big)\ln x - \int \Big(\frac{5}{2}x^2 - 4x\Big)\frac{1}{x}\,dx\Big] = \\ &= \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\ln^2 x - \Big(\frac{5}{2}x^2 - 4x\Big)\ln x + \int \Big(\frac{5}{2}x - 4\Big)\,dx = \\ &= \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2x\Big)\ln^2 x - \Big(\frac{5}{2}x^2 - 4x\Big)\ln x + \frac{5}{4}x^2 - 4x + c.\end{aligned}$$

3. Si ha che $x = t^2$, quindi $dx = 2t\,dt$, per cui

$$\int \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\,dx = \int \frac{3t-2}{t+2}2t\,dt = \int \frac{6t^2-4t}{t+2}\,dt$$

Dalla divisione dei polinomi $6t^2 - 4t$ e $t + 2$ si ottiene $6t^2 - 4t = (6t - 16)(t + 2) + 32$, perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{6t^2-4t}{t+2}\,dt &= \int \Big(6t - 16 + \frac{32}{t+2}\Big)\,dt = \int (6t-16)\,dt + 32\int \frac{1}{t+2}\,dt = \\ &= 3t^2 - 16t + 32\ln|t+2| + c = 3x - 16\sqrt{x} + 32\ln(\sqrt{x}+2) + c.\end{aligned}$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{7n\sqrt{n}}{n^4} = 7/n^{5/2}$ che è il termine generale di una serie convergente poiché $5/2 > 1$. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

b. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Big(\arccos\Big(\frac{n}{2n+1}\Big)\Big)^n} = \lim_{n\to+\infty} \arccos\Big(\frac{n}{2n+1}\Big) = \arccos(1/2)\,.$$

Essendo $\arccos(1/2) = \pi/3 > 1$ la serie diverge.

c. Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n} - e^{-3n}}{e^{2n} + 3e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-5n}}{1 + 3e^{-3n}} = 1 \neq 0\,,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

d. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{4^{2(n+1)+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{4^{2n+1}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^2}{n+2} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

5. a. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto $a_n = \frac{1}{\ln(n^2-7n+16)}$ si ha $a_n > 0$ se e solo se $\ln(n^2-7n+16) > 0$ ovvero $n^2 - 7n + 16 > 1$. Quest'ultima relazione è sempre vera (come si può vedere verificando che il discriminante dell'equazione di secondo grado è negativo). Inoltre il termine generale è banalmente infinitesimo. Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-7x+16)}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2(x^2-7x+16)} \cdot \frac{2x-7}{x^2-7x+16} = \frac{7-2x}{(x^2-7x+16)\ln^2(x^2-7x+16)}\,.$$

Poiché $x^2-7x+16 > 0$ per ogni x, il denominatore è sempre positivo, quindi $f'(x) \leq 0$ se e solo se $7-2x \leq 0$ ovvero se $x \geq 7/2$. Quindi la funzione f è decrescente per ogni $x \geq 7/2$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 4$.
Alternativamente, utilizzando la monotonia del logaritmo e il fatto che $a_n > 0$,

$$\begin{array}{ccccc} a_n \geq a_{n+1} & \iff & \dfrac{1}{\ln(n^2-7n+16)} \geq \dfrac{1}{\ln((n+1)^2-7(n+1)+16)} & \iff & \\ \ln(n^2-5n+10) \geq \ln(n^2-7n+16) & \iff & n^2-5n+10 \geq n^2-7n+16 & \iff & n \geq 3. \end{array}$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge.

b. Si osserva che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-7x+16)}{x} = 0$$

(si può utilizzare il Teorema di de l'Hôpital). Di conseguenza per tutti gli x sufficientemente grandi si avrà $\ln(x^2-7x+16) < x$ e quindi, per tutti gli n sufficientemente grandi

$$\frac{1}{\ln(n^2-7n+16)} > \frac{1}{n}\,.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n$ è divergente, per il criterio del confronto, anche la serie data diverge assolutamente.

6. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y):\ x^2-2x+y^2 > 0\big\} = \big\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2 > 1\big\}\,.$$

Il dominio è dunque la regione di piano esterna alla circonferenza di equazione $(x-1)^2+y^2 = 1$, di centro $C = (1,0)$ e raggio $R = 1$.
L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| \geq \pi/2$ tale insieme è vuoto (poiché l'arcotangente assume valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$), altrimenti equivale a $\ln(x^2-2x+y^2)-1 = \tan k$ ovvero $x^2-2x+y^2 = e^{1+\tan k}$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio $R_k = \sqrt{1+e^{1+\tan k}}$.
Al variare di $k \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(1,0)$ e raggio $R_k > 1$ crescente al crescere di k.

7. Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \big\{(x,y):\ x+y-1 > 0\big\}$ e rappresenta un semipiano.
I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y-1} - (y+1) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y-1} - (x-3) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1} = y+1, \\ \dfrac{1}{x+y-1} = x-3. \end{cases}$$

Dalle due equazioni si ricava $y+1 = x-3$ ovvero $y = x-4$ che sostituito nella seconda fornisce

$$\frac{1}{x+(x-4)-1} = x-3 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = (x-3)(2x-5) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 11x + 14 = 0\,.$$

L'equazione di secondo grado ha come soluzioni $x_1 = 7/2$, $x_2 = 2$ per cui le soluzioni del sistema sono $P_1 = (7/2, -1/2)$, $P_2 = (2, -2)$. Il punto P_2 non appartiene al dominio di definizione della funzione, dunque P_1 è l'unico punto critico di f.
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y-1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x+y-1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y-1)^2} - 1\,,$$

perciò l'Hessiano nel punto P_1 è

$$H(7/2, -1/2) = \begin{vmatrix} -1/4 & -5/4 \\ -5/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -3/2\,.$$

Essendo $H(7/2, -1/2) < 0$ si ottiene che P_1 è un punto di sella.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 24 giugno 2003

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{5-x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2(x) = 2\cos(2x) - 3x^2\sqrt{x}\,.$$

2. Calcolare, utilizzando due volte il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x) = (2x-3)\ln^2(x)$.

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,$$

4. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\sqrt{n} - \log n + 1}{2n^{2/3} + 3n^{3/2} - 4}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)^n \pi^{-2n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n} - 2e^{-n}}{e^{2n} + 4e^{-3n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n+2}}{(n+1)!}$.

5. Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(2n^2 - 7n + 9)}\,.$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;
b) provare che la serie diverge assolutamente.

6. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \arctan(\ln(x^2+y^2+2y)-2)$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

7. Descrivere geometricamente il dominio e determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \ln(x+y-1) - (x+1)(y-3)$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punti: 2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 3, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 24 giugno 2003

Svolgimento

1.

$$\int \frac{5-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = 5\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int 2\cos(2x) - 3x^2\sqrt{x}\,dx = \int 2\cos(2x)\,dx - 3\int x^{5/2}\,dx = \operatorname{sen}(2x) - \frac{6}{7}x^{7/2} + c.$$

2. Applicando due volte il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (2x-3)\ln^2(x)\,dx &= \big(x^2-3x\big)\ln^2 x - \int \big(x^2-3x\big)\frac{2\ln x}{x}\,dx = \\ &= \big(x^2-3x\big)\ln^2 x - \int (2x-6)\ln x\,dx = \\ &= \big(x^2-3x\big)\ln^2 x - \left[\big(x^2-6x\big)\ln x - \int \big(x^2-6x\big)\frac{1}{x}\,dx\right] = \\ &= \big(x^2-3x\big)\ln^2 x - \big(x^2-6x\big)\ln x + \int \big(x-6\big)\,dx = \\ &= \big(x^2-3x\big)\ln^2 x - \big(x^2-6x\big)\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 6x + c.\end{aligned}$$

3. Si ha che $x = t^2$, quindi $dx = 2t\,dt$, per cui

$$\int \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{t-4}{t+1}2t\,dt = \int \frac{2t^2-8t}{t+1}\,dt$$

Dalla divisione dei polinomi $2t^2-8t$ e $t+1$ si ottiene $2t^2-8t = (2t-10)(t+1)+10$, perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{2t^2-8t}{t+1}\,dt &= \int \Big(2t-10+\frac{10}{t+1}\Big)\,dt = \int (2t-10)\,dt + 10\int \frac{1}{t+1}\,dt = \\ &= t^2 - 10t + 10\ln|t+1| + c = x - 10\sqrt{x} + 10\ln(\sqrt{x}+1) + c.\end{aligned}$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{12\sqrt{n}}{3n^{3/2}} = 4/n$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

b. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\arctan n)^n \pi^{-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi} < 1\,.$$

Dunque la serie converge.

c. Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{3n}-2e^{-n}}{e^{2n}+4e^{-3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n}-2e^{-3n}}{1+4e^{-5n}} = +\infty \neq 0\,,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini definitivamente positivi, diverge.

d. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{5^{3(n+1)+2}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{5^{3n+2}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^3}{n+2} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

5. a. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto $a_n = \frac{1}{\ln(2n^2-7n+9)}$ si ha $a_n > 0$ se e solo se $\ln(2n^2 - 7n + 9) > 0$ ovvero $2n^2 - 7n + 9 > 1$. Quest'ultima relazione è sempre vera (come si può vedere verificando che il discriminante dell'equazione di secondo grado è negativo). Inoltre il termine generale è banalmente infinitesimo. Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(2x^2-7x+9)}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2(2x^2-7x+9)} \cdot \frac{4x-7}{2x^2-7x+9} = \frac{7-4x}{(2x^2-7x+9)\ln^2(2x^2-7x+9)}.$$

Poiché $2x^2 - 7x + 9 > 0$ per ogni x, il denominatore è sempre positivo, quindi $f'(x) \leq 0$ se e solo se $7 - 4x \leq 0$ ovvero se $x \geq 7/4$. Quindi la funzione f è decrescente per ogni $x \geq 7/4$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 2$.
Alternativamente, utilizzando la monotonia del logaritmo e il fatto che $a_n > 0$,

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{\ln(2n^2-7n+9)} \geq \frac{1}{\ln(2(n+1)^2-7(n+1)+9)} \iff$$
$$\ln(2n^2-3n+4) \geq \ln(2n^2-7n+9) \iff 2n^2-3n+4 \geq 2n^2-7n+9 \iff n \geq 5/4.$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge.

b. Si osserva che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x^2-7x+9)}{x} = 0$$

(si può utilizzare il Teorema di de l'Hôpital). Di conseguenza per tutti gli x sufficientemente grandi si avrà $\ln(2x^2 - 7x + 9) < x$ e quindi, per tutti gli n sufficientemente grandi

$$\frac{1}{\ln(2n^2-7n+9)} > \frac{1}{n}.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n$ è divergente, per il criterio del confronto, anche la serie data diverge assolutamente.

6. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \ x^2+y^2+2y > 0\} = \{(x,y) : \ x^2+(y+1)^2 > 1\}.$$

Il dominio è dunque la regione di piano esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + (y + 1)^2 = 1$, di centro $C = (0, -1)$ e raggio $R = 1$.
L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x, y) = k$. Per $|k| \geq \pi/2$ tale insieme è vuoto (poiché l'arcotangente assume valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$), altrimenti equivale a $\ln(x^2+y^2+2y)-2 = \tan k$ ovvero $x^2 + y^2 + 2y = e^{2+\tan k}$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(0, -1)$ e raggio $R_k = \sqrt{1 + e^{2+\tan k}}$.
Al variare di $k \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(0, -1)$ e raggio $R_k > 1$ crescente al crescere di k.

7. Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x,y) : \ x+y-1 > 0\}$ e rappresenta un semipiano.
I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y-1} - (y-3) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y-1} - (x+1) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1} = y-3, \\[2ex] \dfrac{1}{x+y-1} = x+1. \end{cases}$$

Dalle due equazioni si ricava $y-3=x+1$ ovvero $y=x+4$ che sostituito nella seconda fornisce

$$\frac{1}{x+(x+4)-1}=x+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1=(x+1)(2x+3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2+5x+2=0\,.$$

L'equazione di secondo grado ha come soluzioni $x_1=-1/2$, $x_2=-2$ per cui le soluzioni del sistema sono $P_1=(-1/2,7/2)$, $P_2=(-2,2)$. Il punto P_2 non appartiene al dominio di definizione della funzione, dunque P_1 è l'unico punto critico di f.
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y-1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x+y-1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(x+y-1)^2}-1\,,$$

perciò l'Hessiano nel punto P_1 è

$$H(-1/2,7/2)=\begin{vmatrix} -1/4 & -5/4 \\ -5/4 & -1/4 \end{vmatrix}=-3/2\,.$$

Essendo $H(-1/2,7/2)<0$ si ottiene che P_1 è un punto di sella.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 24 giugno 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{2+3x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2(x) = 2\,\mathrm{sen}(2x) + 2x\sqrt{x^3}\,.$$

2. Calcolare, utilizzando due volte il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $g(x) = (4x+1)\ln^2(x)$.

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\,dx\,,$$

4. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - 7n^{5/2} + 1}{4n^{7/2} + 3\log n - 5}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mathrm{arcsen}\Big(\frac{n}{3n+1}\Big)\Big)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 2e^{-3n}}{2e^n + 3e^{-n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{4n+1}}{(n+1)!}$.

5. Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^2 - 4n + 7)}\,.$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;
b) provare che la serie diverge assolutamente.

6. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \arctan\big(\ln(x^2+y^2-2y)+1\big)$. Descrivere geometricamente e rappresentare le linee di livello.

7. Descrivere geometricamente il dominio e determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \ln(x+y+2) - (x-1)(y+2)$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punti: 2+2, 4, 4, 3+3+3+3, 3+3, 3, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 24 giugno 2003

Svolgimento

1.

$$\int \frac{2+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - 3\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\arcsen x - 3\sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int 2\,\mathrm{sen}(2x) + 2x\sqrt{x^3}\,dx = -\int 2(-\,\mathrm{sen}(2x))\,dx + 2\int x^{5/2}\,dx = -\cos(2x) + \frac{4}{7}x^{7/2} + c.$$

2. Applicando due volte il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (4x+1)\ln^2(x)\,dx &= \big(2x^2+x\big)\ln^2 x - \int \big(2x^2+x\big)\frac{2\ln x}{x}\,dx = \\ &= \big(2x^2+x\big)\ln^2 x - \int (4x+2)\ln x\,dx = \\ &= \big(2x^2+x\big)\ln^2 x - \left[\big(2x^2+2x\big)\ln x - \int \big(2x^2+2x\big)\frac{1}{x}\,dx\right] = \\ &= \big(2x^2+x\big)\ln^2 x - \big(2x^2+2x\big)\ln x + \int \big(2x+2\big)\,dx = \\ &= \big(2x^2+x\big)\ln^2 x - \big(2x^2+2x\big)\ln x + x^2 + 2x + c.\end{aligned}$$

3. Si ha che $x = t^2$, quindi $dx = 2t\,dt$, per cui

$$\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\,dx = \int \frac{2t-1}{t+3}2t\,dt = \int \frac{4t^2-2t}{t+3}\,dt$$

Dalla divisione dei polinomi $4t^2-2t$ e $t+3$ si ottiene $4t^2-2t = (4t-14)(t+3)+42$, perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{4t^2-2t}{t+3}\,dt &= \int \Big(4t-14+\frac{42}{t+3}\Big)\,dt = \int (4t-14)\,dt + 42\int \frac{1}{t+3}\,dt = \\ &= 2t^2 - 14t + 42\ln|t+3| + c = 2x - 14\sqrt{x} + 42\ln(\sqrt{x}+3) + c.\end{aligned}$$

4. a. Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{2n^3}{4n^{7/2}} = 1/2n^{1/2}$ che è il termine generale di una serie divergente poiché $1/2 < 1$. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

b. Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Big(\arcsen\Big(\frac{n}{3n+1}\Big)\Big)^n} = \lim_{n\to+\infty} \arcsen\Big(\frac{n}{3n+1}\Big) = \arcsen(1/3)\,.$$

Poiché $\arcsen(1/3) < \arcsen(1/2) = \pi/6 < 1$, la serie converge.

c. Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - 2e^{-3n}}{2e^n + 3e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-2e^{-4n}}{2+3e^{-2n}} = \frac{1}{2} \neq 0\,,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

d. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{3^{4(n+1)+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{3^{4n+1}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^4}{n+2} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

5. a. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto $a_n = \frac{1}{\ln(n^2-4n+7)}$ si ha $a_n > 0$ se e solo se $\ln(n^2-4n+7) > 0$ ovvero $n^2-4n+7 > 1$. Quest'ultima relazione è sempre vera (come si può vedere verificando che il discriminante dell'equazione di secondo grado è negativo). Inoltre il termine generale è banalmente infinitesimo. Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-4x+7)}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2(x^2-4x+7)} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+7} = \frac{4-2x}{(x^2-4x+7)\ln^2(x^2-4x+7)}.$$

Poiché $x^2-4x+7 > 0$ per ogni x, il denominatore è sempre positivo, quindi $f'(x) \leq 0$ se e solo se $4-2x \leq 0$ ovvero se $x \geq 2$. Quindi la funzione f è decrescente per ogni $x \geq 2$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 2$.
Alternativamente, utilizzando la monotonia del logaritmo e il fatto che $a_n > 0$,

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{\ln(n^2-4n+7)} \geq \frac{1}{\ln((n+1)^2-4(n+1)+7)} \iff$$
$$\ln(n^2-2n+4) \geq \ln(n^2-4n+7) \iff n^2-2n+4 \geq n^2-4n+7 \iff n \geq 3/2$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge.

b. Si osserva che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-4x+7)}{x} = 0$$

(si può utilizzare il Teorema di de l'Hôpital). Di conseguenza per tutti gli x sufficientemente grandi si avrà $\ln(x^2-4x+7) < x$ e quindi, per tutti gli n sufficientemente grandi

$$\frac{1}{\ln(n^2-4n+7)} > \frac{1}{n}.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n$ è divergente, per il criterio del confronto, anche la serie data diverge assolutamente.

6. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \{(x,y): \ x^2+y^2-2y > 0\} = \{(x,y): \ x^2+(y-1)^2 > 1\}.$$

Il dominio è dunque la regione di piano esterna alla circonferenza di equazione $x^2+(y-1)^2 = 1$, di centro $C = (0,1)$ e raggio $R = 1$.
L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| \geq \pi/2$ tale insieme è vuoto (poiché l'arcotangente assume valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$), altrimenti equivale a $\ln(x^2+y^2-2y)+1 = \tan k$ ovvero $x^2+y^2-2y = e^{\tan k - 1}$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio $R_k = \sqrt{1+e^{\tan k-1}}$. Al variare di $k \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(0,1)$ e raggio $R_k > 1$ crescente al crescere di k.

7. Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x,y): \ x+y+2 > 0\}$ e rappresenta un semipiano.
I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y+2} - (y+2) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y+2} - (x-1) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x+y+2} = y+2, \\[2ex] \dfrac{1}{x+y+2} = x-1. \end{cases}$$

Dalle due equazioni si ricava $y + 2 = x - 1$ ovvero $y = x - 3$ che sostituito nella seconda fornisce

$$\frac{1}{x + (x-3) + 2} = x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = (x-1)(2x-1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 3x = 0\,.$$

L'equazione di secondo grado ha come soluzioni $x_1 = 3/2$, $x_2 = 0$ per cui le soluzioni del sistema sono $P_1 = (3/2, -3/2)$, $P_2 = (0, -3)$. Il punto P_2 non appartiene al dominio di definizione della funzione, dunque P_1 è l'unico punto critico di f.
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y+2)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x+y+2)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y+2)^2} - 1\,,$$

perciò l'Hessiano nel punto P_1 è

$$H(3/2, -3/2) = \begin{vmatrix} -1/4 & -5/4 \\ -5/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -3/2\,.$$

Essendo $H(3/2, -3/2) < 0$ si ottiene che P_1 è un punto di sella.