Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 1° aprile 2003

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove lecito) il Teorema de L'Hôpital oppure gli sviluppi di Taylor

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin(7x) - \sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}(3x)}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} + 3\arctan x}{4\log x - 5x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x}-1)}{4x^2\operatorname{sen}(2x)}$ (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(2x+3x^2) - \operatorname{sen}(3x)}{e^{7x} - \cos(3x) + 4x^2}$,

(e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{2\arctan(2x^2) - \pi}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{3\log x + 2}{2 - 5\log x}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = 2x - 1 + \log|x^2 - 4x + 2|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** determinare gli eventuali asintoti; **c)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** utilizzando opportunamente il Teorema degli Zeri e i risultati dei punti precedenti, studiare qualitativamente gli zeri di g; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $h_1(x) = \operatorname{sen}(x - 3x^2)$ di ordine 3, (b) $h_2(x) = e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}$ di ordine 3,
(c) $h_3(x) = x^2\big(1 - \cos(x^3)\big)$ di ordine 7.

Punti: 2+2+2+2+2, 7, 9, 3+3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 1 aprile 2003

Svolgimento

1. a. Il limite si presenta nella forma $[\frac{-1}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a -1 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Quindi la funzione è positiva in un intorno sinistro di 0, e negativa in un intorno destro. Concludendo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2\arcsen(7x) - \sqrt{x+1}}{\sen(3x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{2\arcsen(7x) - \sqrt{x+1}}{\sen(3x)} = -\infty\,,$$

dunque il limite non esiste.

b. Il limite richiesto non è in forma indeterminata. Infatti poiché la funzione $\frac{1}{(x-1)^2}$ tende a $+\infty$ e quindi $e^{-1/(x-1)^2}$ tende a 0, il numeratore tende a $3\arctan 1 = 3\pi/4$, mentre il denominatore tende a -5. Quindi il limite richiesto è $-3\pi/20$.

c. Si può applicare de L'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sen x} - 1 - \sen(e^{2x}-1)}{3x^2\sen(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sen x}2\cos x - \cos(e^{2x}-1)e^{2x}2}{6x\sen(2x) + 3x^2\cos(2x)2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sen x}4\cos^2 x - e^{2\sen x}2\sen x + \sen(e^{2x}-1)e^{4x}4 - \cos(e^{2x}-1)e^{2x}4}{6\sen(2x) + 6x\cos(2x)2 + 12x\cos(2x) - 6x^2\sen(2x)2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\begin{aligned}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} &\lim_{x\to 0}\Big(e^{2\sen x}8\cos^3 x - e^{2\sen x}8\sen x\cos x - e^{2\sen x}4\sen x\cos x - e^{2\sen x}2\cos x\\ &+ \cos(e^{2x}-1)e^{6x}8 + \sen(e^{2x}-1)e^{4x}16 + \sen(e^{2x}-1)e^{4x}8 -\\ &- \cos(e^{2x}-1)e^{2x}8\Big)\Big/\Big(12\cos(2x) + 24\cos(2x) - 24x\sen(2x)2 -\\ &- 24x\sen(2x) - 12x^2\cos(2x)2\Big) = \frac{8-2+8-8}{12+24} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\sen y = y + o(y), \qquad \sen y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$
$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$

si ottiene

$$3x^2\sen(2x) = 3x^2\big(2x + o(2x)\big) = 6x^3 + o(x^3),$$
$$e^{2x} - 1 = \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o\big((2x)^3\big)\right) - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(e^{2x}-1) &= \Big(2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\Big)-\frac{1}{6}\Big(2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\Big)^3+\\ &\quad+o\Big(\Big(2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\Big)^3\Big)=\\ &= 2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{6}8x^3+o(x^3)=2x+2x^2+o(x^3),\\ e^{2\operatorname{sen}x} &= 1+\Big(2x-2\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)+\frac{1}{2}\Big(2x-2\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)^2+\frac{1}{6}\Big(2x-2\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)^3+\\ &\quad+o\Big((2x-2\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3\Big)=\\ &= 1+2x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}4x^2+\frac{1}{6}8x^3+o(x^3)=1+2x+2x^2+x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x)=\big(1+2x+2x^2+x^3+o(x^3)\big)-1-\big(2x+2x^2+o(x^3)\big)=x^3+o(x^3)\,.$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}(e^{2x}-1)}{3x^2\operatorname{sen}(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{6x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}{6+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{6}\,.$$

Il limite richiesto vale allora 1/6.

d. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(2x+3x^2)-\operatorname{sen}(3x)}{e^{7x}-\cos(3x)+4x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3x^2)^2}}\,(2+6x)-3\cos(3x)}{7e^{7x}+3\operatorname{sen}(3x)+8x}=\frac{2-3}{7+0}=-\frac{1}{7}\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-1/7$.
Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\operatorname{arcsen}y=y+o(y),\qquad \operatorname{sen}y=y+o(y),\qquad e^y=1+y+o(y),\qquad \cos y=1+o(y)\,,$$

si ha

$$\begin{gathered}\operatorname{arcsen}(2x+3x^2)-\operatorname{sen}(3x)=(2x+3x^2)+o((2x+3x^2))-(3x+o(3x))=-x+o(x),\\ e^{7x}-\cos(3x)+4x^2=1+7x+o(7x)-(1+o(x))+4x^2=7x+o(x),\end{gathered}$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(2x+3x^2)-\operatorname{sen}(3x)}{e^{7x}-\cos(3x)+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+o(x)}{7x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{o(x)}{x}}{7+\frac{o(x)}{x}}=-\frac{1}{7}\,.$$

e. Poiché $\lim_{y\to+\infty}\arctan y=\pi/2$, il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(1+\frac{3}{x^2}\Big)}{2\arctan(2x^2)-\pi}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+3/x^2}\Big(-\frac{6}{x^3}\Big)}{\frac{2}{1+(2x^2)^2}\,4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6(1+4x^4)}{8x^4+24x^2}=-\frac{24}{8}=-3\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale -3.

2. a-b-c) La funzione è definita per $x > 0$ e $2 - 5\log x \neq 0$, quindi il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{x > 0,\ x \neq e^{2/5}\}$. Segno: si ha $3\log x + 2 \geq 0$ se e solo se $x \geq e^{-2/3}$, mentre $2 - 5\log x > 0$ se e solo se $x < e^{2/5}$. Allora

$$f(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } e^{-2/3} < x < e^{2/5}, \\ = 0, & \text{se } x = e^{-2/3}, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < e^{-2/3} \text{ oppure } x > e^{2/5}. \end{cases}$$

Dallo studio del segno risulta anche

$$\lim_{x \to (e^{2/5})^{\pm}} f(x) = \left[\frac{6/5 + 2}{0^{\mp}}\right] = \mp\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{2}{\log x}}{\frac{2}{\log x} - 5} = -\frac{3}{5}, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3 + \frac{2}{\log x}}{\frac{2}{\log x} - 5} = -\frac{3}{5}.$$

Quindi la retta di equazione $x = e^{2/5}$ è un asintoto verticale, mentre quella di equazione $y = -3/5$ è un asintoto orizzontale.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{x}(2 - 5\log x) - (3\log x + 2)\frac{-5}{x}}{(2 - 5\log x)^2} = \frac{16}{x(2 - 5\log x)^2}.$$

Quindi la derivata prima è sempre positiva sul dominio di definizione, perciò f è crescente su $]0, e^{2/5}[$ e su $]e^{2/5}, +\infty[$. La funzione non ammette massimi/minimi relativi né assoluti.

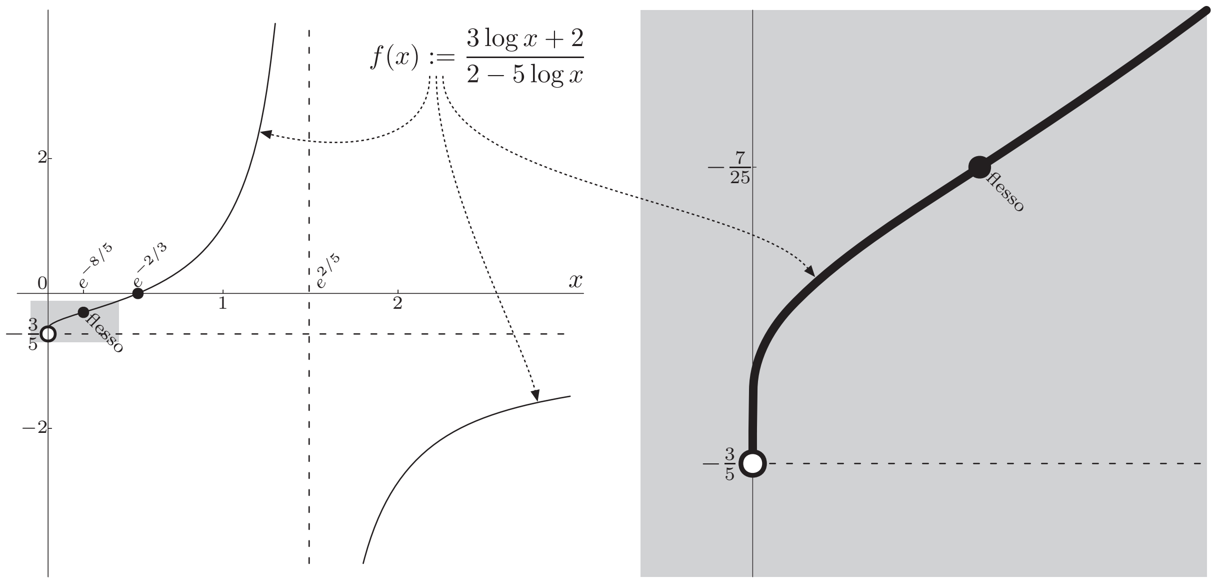
e. La derivata seconda è

$$f''(x) = -16\frac{(2 - 5\log x)^2 + x \cdot 2(2 - 5\log x)\frac{-5}{x}}{x^2(2 - 5\log x)^4} = 16\frac{5\log x + 8}{x^2(2 - 5\log x)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $x > e^{-8/5}$, il denominatore se $x < e^{2/5}$. Perciò

$$f''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } e^{-8/5} < x < e^{2/5}, \\ = 0, & \text{se } x = e^{-8/5}, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < e^{-8/5} \text{ oppure } x > e^{2/5}. \end{cases}$$

Quindi la funzione è convessa su $]e^{-8/5}, e^{2/5}[$, mentre è concava su $]0, e^{-8/5}[$ e su $]e^{2/5}, +\infty[$. In $x = e^{-8/5}$ presenta un punto di flesso. Nella figura la zona del punto di flesso è evidenziata con sfondo grigio, e ingrandita a destra con scala diversa.



3. a. La funzione è definita per $x^2 - 4x + 2 \neq 0$ ovvero per $x \neq x_1 := 2 - \sqrt{2}$ e $x \neq x_2 := 2 + \sqrt{2}$, pertanto il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$.
Poiché $\lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty$ si ottiene che

$$\lim_{x \to 2-\sqrt{2}} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2+\sqrt{2}} g(x) = -\infty\,,$$

Gli altri due limiti da calcolare sono

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\log|x^2 - 4x + 2|}{x}\right)\right) = [-\infty \cdot (2 - 0 + 0)] = -\infty,$$

essendo $\lim_{x \to -\infty} \frac{\log|x^2-4x+2|}{x} = 0$ (usare ad esempio de l'Hôpital).

b. Per quanto visto sopra, le rette di equazione $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ sono asintoti verticali. Inoltre, come sopra si verifica che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 2\,,$$

ma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(g(x) - 2x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} (\log|x^2 - 4x + 2| - 1) = +\infty\,,$$

perciò non esistono asintoti obliqui.

c. Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 - 4x + 2}(2x - 4) = 2\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 2}\,.$$

Il denominatore è positivo per $x < x_1$ oppure $x > x_2$, mentre il numeratore è positivo per $x < 0$ oppure $x > 3$. Ricapitolando, si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x < 0, \text{ oppure } x_1 < x < 3 \text{ oppure } x > x_2 \\ = 0, & \text{se } x = 0, \text{ oppure } x = 3 \\ < 0, & \text{se } 0 < x < x_1 \text{ oppure } 3 < x < x_2. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-\infty, 0[$, su $]x_1, 3[$ e su $]x_2, +\infty[$ mentre è decrescente su $]0, x_1[$ e su $]3, x_2[$. In $x = 0$ e $x = 3$ la funzione ammette due massimi relativi.

d. La derivata seconda è

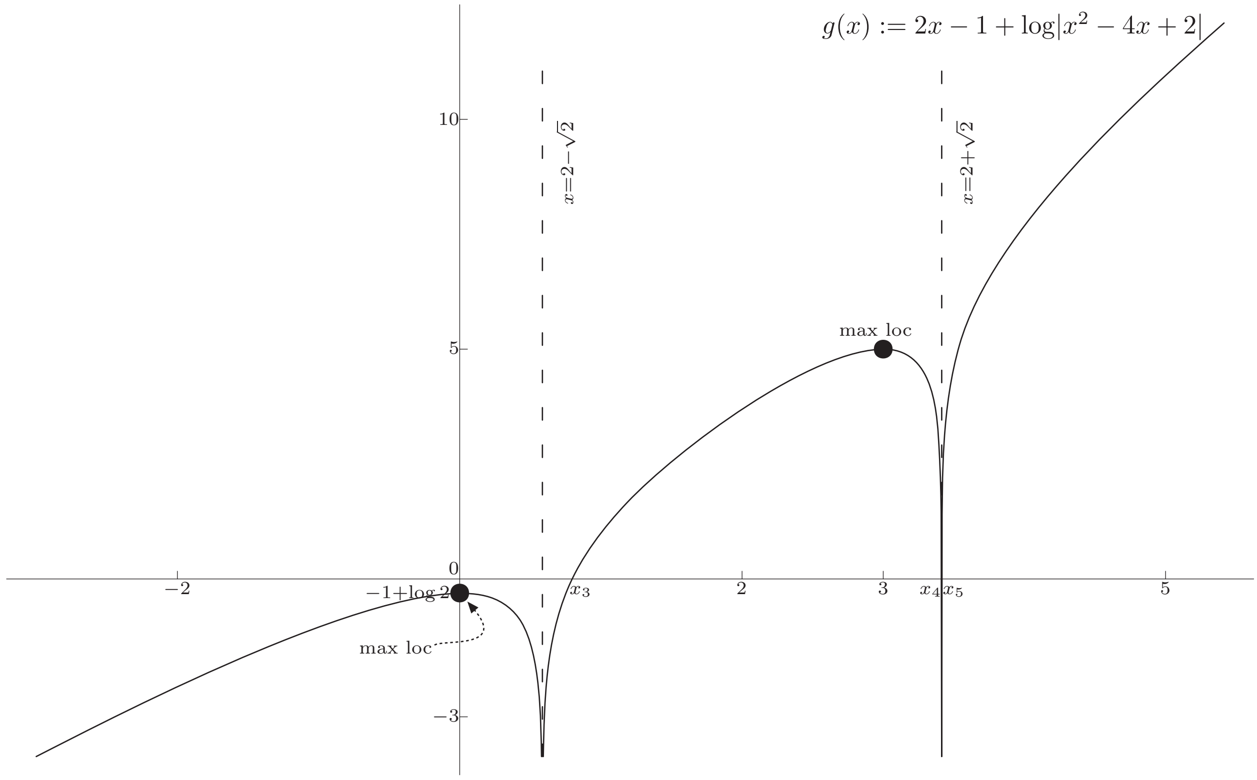
$$g''(x) = 2\frac{(2x - 3)(x^2 - 4x + 2) - (x^2 - 3x)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 2)^2} = -2\frac{x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 4x + 2)^2}\,.$$

Poiché, limitatamente al dominio, la derivata seconda è sempre negativa si ha che la funzione è concava su $]-\infty, x_1[$, su $]x_1, x_2[$ e su $]x_2, +\infty[$.

e. Applicando una delle conseguenze del Teorema degli Zeri all'intervallo $]x_1, 3]$, poiché $g(3) = 5 > 0$ e $\lim_{x \to x_1^+} g(x) = -\infty$, si ottiene che esiste $x_3 \in\,]x_1, 3[$ tale che $g(x_3) = 0$. Dal punto c) si osserva che la funzione è strettamente crescente sull'intervallo, dunque tale punto è unico. Analogamente si può procedere sugli intervalli $[3, x_2[$ e $]x_2, +\infty[$ provando l'esistenza, rispettivamente, di altri due punti x_4 e x_5 dove la funzione si annulla. In definitiva si ha che

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in\,]x_3, x_4[\, \cup\,]x_5, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = x_3, \text{ oppure } x = x_4, \text{ oppure } x = x_5 \\ < 0, & \text{se } x \in\,]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_1, x_3[\, \cup\,]x_4, x_2[\, \cup\,]x_2, x_5[. \end{cases}$$

In pratica poi i punti x_4, x_2, x_5 sono molto vicini fra loro e sono indistinguibili nella figura che segue.



4. Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di una funzione $h(x)$ è

$$P_3(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{6}x^3 .$$

Basta allora calcolare $h(0) = 0$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$.

a. Si ha

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= \cos(x - 3x^2)(1 - 6x), \\ h_1''(x) &= -\operatorname{sen}(x - 3x^2)(1 - 6x)^2 - 6\cos(x - 3x^2), \\ h_1'''(x) &= -\cos(x - 3x^2)(1 - 6x)^3 - \operatorname{sen}(x - 3x^2)2(1 - 6x)(-6) + 6\operatorname{sen}(x - 3x^2)(1 - 6x). \end{aligned}$$

Quindi $h_1'(0) = 1$, $h_1''(0) = -6$, $h_1'''(0) = -1$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = x + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 = x - 3x^2 - \frac{x^3}{6} .$$

Alternativamente, sfruttando lo sviluppo di Taylor della funzione seno in $x_0 = 0$ si ha

$$\operatorname{sen}(x - 3x^2) = (x - 3x^2) - \frac{1}{6}(x - 3x^2)^3 + o\big((x - 3x^2)^3\big) = x - 3x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) .$$

Dall'unicità dello sviluppo segue che $P_3(x) = x - 3x^2 - \frac{x^3}{6}$.

b. Si ha

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(6\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(2x)), \\ h_2''(x) &= e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(6\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(2x))^2 - e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(18\operatorname{sen}(3x) + 4\cos(2x)) \\ h_2'''(x) &= e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(6\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(2x))^3 + \\ &\quad + e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}2(6\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(2x))(-18\operatorname{sen}(3x) - 4\cos(2x)) - \\ &\quad - e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(6\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(2x))(18\operatorname{sen}(3x) + 4\cos(2x)) - \\ &\quad - e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)}(54\cos(3x) - 8\operatorname{sen}(2x)). \end{aligned}$$

Quindi $h_2(0) = e$, $h_2'(0) = 6e$, $h_2''(0) = 32e$, $h_2'''(0) = 90e$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = e + 6ex + \frac{32e}{2}x^2 + \frac{90e}{6}x^3 = e(1 + 6x + 16x^2 + 15x^3)\,.$$

Alternativamente, si possono sfruttare gli sviluppi di Taylor delle funzioni seno e coseno in $x_0 = 0$, e quello dell'esponenziale in $y_0 = 2\operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1$. Si ha

$$\operatorname{sen}(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3), \qquad \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3),$$
$$e^y = e + e(y-1) + \frac{e}{2}(y-1)^2 + \frac{e}{6}(y-1)^3 + o((y-1)^3),$$

per cui

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(3x) + \cos(2x) &= 1 + 6x - 2x^2 - 9x^3 + o(x^3), \\ e^{2\operatorname{sen}(3x)+\cos(2x)} &= e + e(6x - 2x^2 - 9x^3 + o(x^3)) + \frac{e}{2}(6x - 2x^2 - 9x^3 + o(x^3))^2 + \\ &\quad + \frac{e}{6}(6x - 2x^2 - 9x^3 + o(x^3))^3 + o\big((6x - 2x^2 - 9x^3 + o(x^3))^3\big) = \\ &= e + e(6x - 2x^2 - 9x^3) + \frac{e}{2}((6x)^2 + 2(6x)(-2x^2)) + \frac{e}{6}(6x)^3 + o(x^3) = \\ &= e(1 + 6x + 16x^2 + 15x^3) + o(x^3). \end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = e(1 + 6x + 16x^2 + 15x^3)$.

c. In questo caso conviene utilizzare gli sviluppi. Infatti

$$h_3(x) = x^2\left(1 - \left(1 - \frac{(x^3)^2}{2} + o\big((x^3)^2\big)\right)\right) = \frac{x^8}{2} + x^2\,o(x^6) = o(x^7)\,.$$

Quindi banalmente $P_7(x) = 0$ è il polinomio nullo.
Alternativamente si possono calcolare le derivate successive fino all'ordine 7, verificando che si annullano tutte in $x_0 = 0$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 1° aprile 2003

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove lecito) il Teorema de L'Hôpital oppure gli sviluppi di Taylor

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(3x-2x^2)-\operatorname{sen}(2x)}{e^{4x}-\cos(5x)-2x^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x}-1-\operatorname{sen}(e^{2x}-1)}{2x^2\operatorname{sen}(3x)}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{2\arctan(2x^2)-\pi}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}-5\arctan x}{2\log x-3x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-e^x}{\cos x-1}$.

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1-2\log x}{3\log x-2}$
a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x)=2x-5-\log|x^2-2x-1|$
a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** determinare gli eventuali asintoti; **c)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** utilizzando opportunamente il Teorema degli Zeri e i risultati dei punti precedenti, studiare qualitativamente gli zeri di g; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0=0$:

(a) $h_1(x)=\cos(3x-x^2)$ di ordine 3, (b) $h_2(x)=e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}$ di ordine 3,
(c) $h_3(x)=x^3\operatorname{sen}(x^5)$ di ordine 7.

Punti: 2+2+2+2+2, 7, 9, 3+3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 1 aprile 2003

Svolgimento

1. a. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(3x-2x^2)-\operatorname{sen}(2x)}{e^{4x}-\cos(5x)-2x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(3x-2x^2)^2}}(3-4x)-2\cos(2x)}{4e^{4x}+5\operatorname{sen}(5x)-4x}=\frac{3-2}{4+0}=\frac{1}{4}\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 1/4.
Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\operatorname{arcsen} y = y+o(y),\qquad \operatorname{sen} y = y+o(y),\qquad e^y=1+y+o(y),\qquad \cos y = 1+o(y)\,,$$

si ha

$$\operatorname{arcsen}(3x-2x^2)-\operatorname{sen}(2x)=(3x-2x^2)+o((3x-2x^2))-(2x+o(2x))=x+o(x),$$
$$e^{4x}-\cos(5x)-2x^2=1+4x+o(4x)-(1+o(x))-2x^2=4x+o(x),$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(3x-2x^2)-\operatorname{sen}(2x)}{e^{4x}-\cos(5x)-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x)}{x}}{4+\frac{o(x)}{x}}=\frac{1}{4}\,.$$

b. Si può applicare de L'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}(e^{2x}-1)}{2x^2\operatorname{sen}(3x)}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}2\cos x-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}2}{4x\operatorname{sen}(3x)+2x^2\cos(3x)3}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}4\cos^2 x-e^{2\operatorname{sen}x}2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}4-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}4}{4\operatorname{sen}(3x)+4x\cos(3x)3+12x\cos(3x)-6x^2\operatorname{sen}(3x)3}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\Big(e^{2\operatorname{sen}x}8\cos^3 x-e^{2\operatorname{sen}x}8\operatorname{sen}x\cos x-e^{2\operatorname{sen}x}4\operatorname{sen}x\cos x-e^{2\operatorname{sen}x}2\cos x$$
$$+\cos(e^{2x}-1)e^{6x}8+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}16+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}8-$$
$$-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}8\Big)/\Big(12\cos(3x)+24\cos(3x)-24x\operatorname{sen}(3x)3-$$
$$-36x\operatorname{sen}(3x)-18x^2\cos(3x)3\Big)=\frac{8-2+8-8}{12+24}=\frac{1}{6}.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0=0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen} y = y+o(y),\qquad \operatorname{sen} y = y-\frac{y^3}{6}+o(y^3),$$
$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3),$$

si ottiene

$$2x^2\operatorname{sen}(3x) = 2x^2\big(3x + o(3x)\big) = 6x^3 + o(x^3),$$
$$e^{2x} - 1 = \Big(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o\big((2x)^3\big)\Big) - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$
$$\operatorname{sen}(e^{2x} - 1) = \Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big) - \frac{1}{6}\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3 +$$
$$+ o\Big(\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3\Big) =$$
$$= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 2x + 2x^2 + o(x^3),$$
$$e^{2\operatorname{sen}x} = 1 + \Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) + \frac{1}{2}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^3 +$$
$$+ o\Big((2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3))^3\Big) =$$
$$= 1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = \big(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)\big) - 1 - \big(2x + 2x^2 + o(x^3)\big) = x^3 + o(x^3)\,.$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen}x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)}{2x^2\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{6x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{6 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{6}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $1/6$.

c. Poiché $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \pi/2$, il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(1 + \frac{4}{x^2}\Big)}{2\arctan(2x^2) - \pi} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1 + 4/x^2}\Big(-\frac{8}{x^3}\Big)}{\frac{2}{1 + (2x^2)^2}\,4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8(1 + 4x^4)}{8x^4 + 32x^2} = -\frac{32}{8} = -4\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale -4.

d. Il limite richiesto non è in forma indeterminata. Infatti poiché la funzione $\frac{1}{(x-1)^2}$ tende a $+\infty$ e quindi $e^{-1/(x-1)^2}$ tende a 0, il numeratore tende a $-5\arctan 1 = -5\pi/4$, mentre il denominatore tende a -3. Quindi il limite richiesto è $5\pi/12$.

e. Il limite si presenta nella forma $[\frac{1}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a 1 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 0. Poiché $\cos x < 1$ in un intorno di 0, il denominatore è sempre negativo. Concludendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - e^x}{\cos x - 1} = \Big[\frac{1}{0^-}\Big] = -\infty\,.$$

2. a-b-c) La funzione è definita per $x > 0$ e $3\log x - 2 \neq 0$, quindi il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{x > 0,\ x \neq e^{2/3}\}$. Segno: si ha $1 - 2\log x \geq 0$ se e solo se $x \leq e^{1/2}$, mentre $3\log x - 2 > 0$ se e solo se $x > e^{2/3}$. Allora

$$f(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } e^{1/2} < x < e^{2/3}, \\ = 0, & \text{se } x = e^{1/2}, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < e^{1/2} \text{ oppure } x > e^{2/3}. \end{cases}$$

Dallo studio del segno risulta anche

$$\lim_{x\to(e^{2/3})^\pm} f(x) = \left[\frac{1-4/3}{0^\pm}\right] = \mp\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\log x}-2}{3-\frac{2}{\log x}} = -\frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\log x}-2}{3-\frac{2}{\log x}} = -\frac{2}{3}.$$

Quindi la retta di equazione $x = e^{2/3}$ è un asintoto verticale, mentre quella di equazione $y = -2/3$ è un asintoto orizzontale.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{x}(3\log x - 2) - (1 - 2\log x)\frac{3}{x}}{(3\log x - 2)^2} = \frac{1}{x(3\log x - 2)^2}.$$

Quindi la derivata prima è sempre positiva sul dominio di definizione, perciò f è crescente su $]0, e^{2/3}[$ e su $]e^{2/3}, +\infty[$. La funzione non ammette massimi/minimi relativi né assoluti.

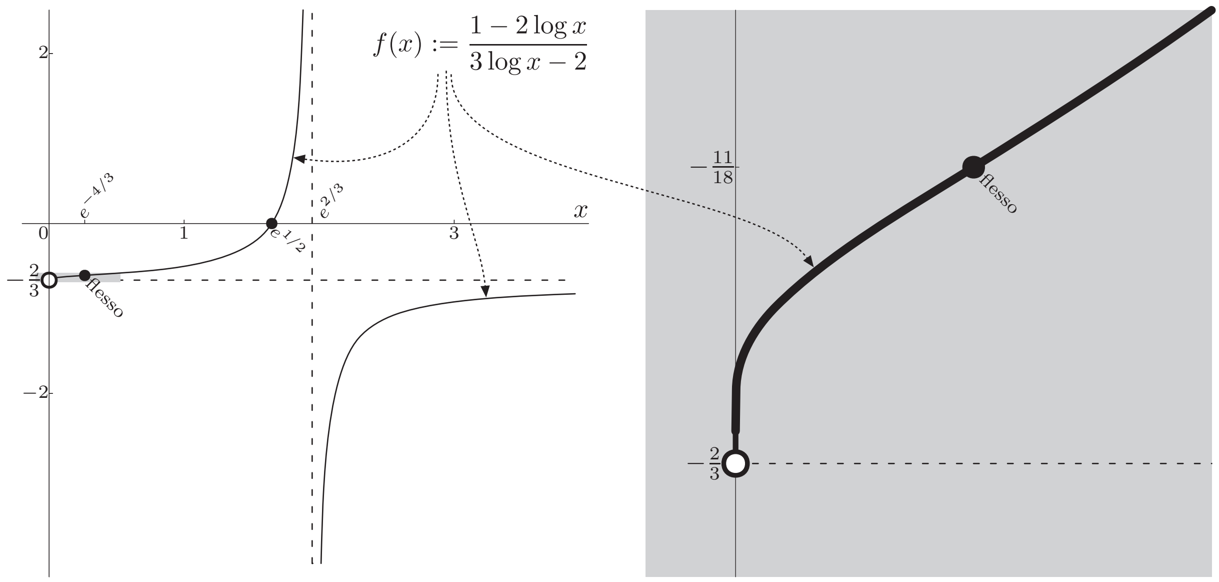
e. La derivata seconda è

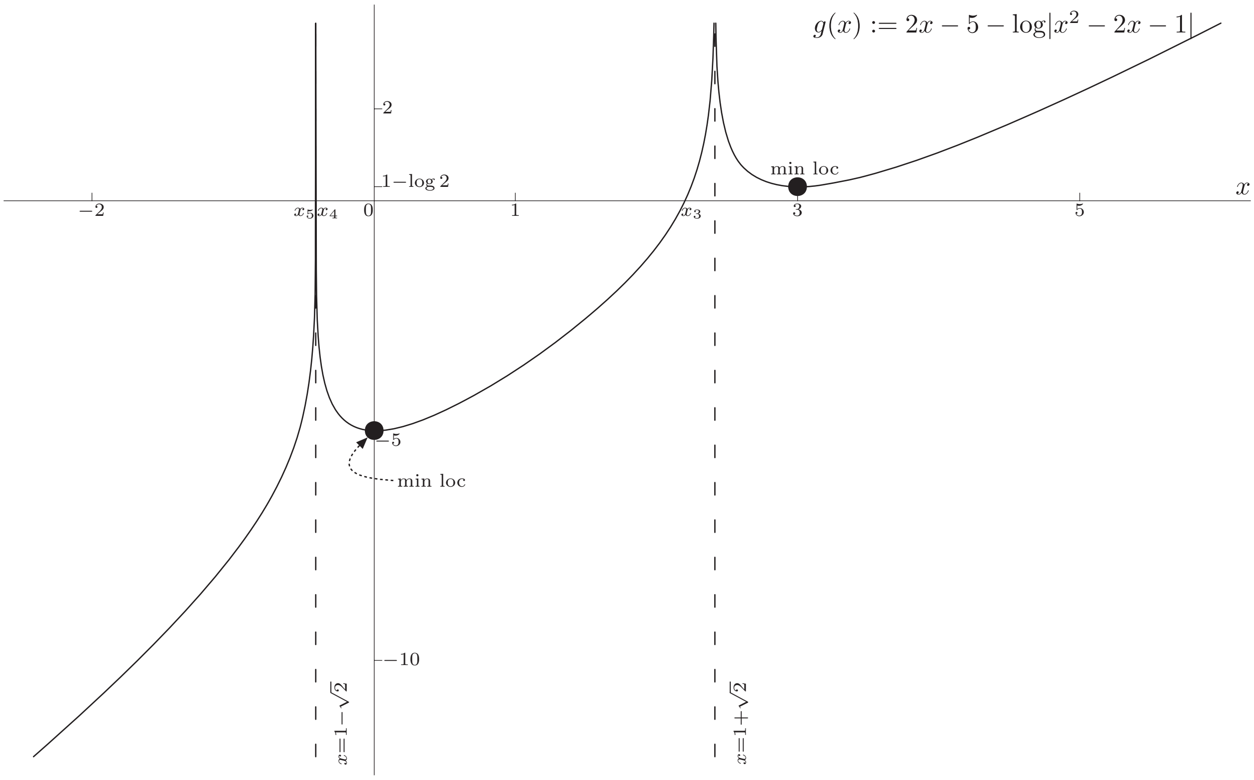
$$f''(x) = -\frac{(3\log x - 2)^2 + x\cdot 2(3\log x - 2)\frac{3}{x}}{x^2(3\log x - 2)^4} = \frac{-(3\log x + 4)}{x^2(3\log x - 2)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $x < e^{-4/3}$, il denominatore se $x > e^{2/3}$. Perciò

$$f''(x)\begin{cases} > 0, & \text{se } e^{-4/3} < x < e^{2/3},\\ = 0, & \text{se } x = e^{-4/3},\\ < 0, & \text{se } 0 < x < e^{-4/3} \text{ oppure } x > e^{2/3}.\end{cases}$$

Quindi la funzione è convessa su $]e^{-4/3}, e^{2/3}[$, mentre è concava su $]0, e^{-4/3}[$ e su $]e^{2/3}, +\infty[$. In $x = e^{-4/3}$ presenta un punto di flesso. Nella figura la zona del punto di flesso è evidenziata con sfondo grigio, e ingrandita a destra con scala diversa.





3. a. La funzione è definita per $x^2 - 2x - 1 \neq 0$ ovvero per $x \neq x_1 := 1 - \sqrt{2}$ e $x \neq x_2 := 1 + \sqrt{2}$, pertanto il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.
Poiché $\lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty$ si ottiene che

$$\lim_{x \to 1-\sqrt{2}} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1+\sqrt{2}} g(x) = +\infty\,,$$

Gli altri due limiti da calcolare sono

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \left(2 - \frac{5}{x} - \frac{\log|x^2 - 2x - 1|}{x} \right) \right) = [+\infty \cdot (2 - 0 - 0)] = +\infty,$$

essendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log|x^2-2x-1|}{x} = 0$ (usare ad esempio de l'Hôpital).

b. Per quanto visto sopra, le rette di equazione $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$ sono asintoti verticali. Inoltre, come sopra si verifica che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 2\,,$$

ma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(g(x) - 2x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} (-5 - \log|x^2 - 2x - 1|) = -\infty\,,$$

perciò non esistono asintoti obliqui.

c. Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2 - 2x - 1}(2x - 2) = 2\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 1}\,.$$

Il denominatore è positivo per $x < x_1$ oppure $x > x_2$, mentre il numeratore è positivo per $x < 0$ oppure $x > 3$. Ricapitolando, si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x < x_1, \text{ oppure } 0 < x < x_2 \text{ oppure } x > 3 \\ = 0, & \text{se } x = 0, \text{ oppure } x = 3 \\ < 0, & \text{se } x_1 < x < 0 \text{ oppure } x_2 < x < 3. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-\infty, x_1[$, su $]0, x_2[$ e su $]3, +\infty[$ mentre è decrescente su $]x_1, 0[$ e su $]x_2, 3[$. In $x = 0$ e $x = 3$ la funzione ammette due minimi relativi.

d. La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{(2x-3)(x^2-2x-1)-(x^2-3x)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2} = 2\frac{x^2-2x+3}{(x^2-2x-1)^2}\,.$$

Poiché, limitatamente al dominio, la derivata seconda è sempre positiva si ha che la funzione è convessa su $]-\infty, x_1[$, su $]x_1, x_2[$ e su $]x_2, +\infty[$.

e. Applicando una delle conseguenze del Teorema degli Zeri all'intervallo $[0, x_2[$, poiché $g(0) = -5 < 0$ e $\lim_{x\to x_2^-} g(x) = +\infty$, si ottiene che esiste $x_3 \in]0, x_2[$ tale che $g(x_3) = 0$. Dal punto c) si osserva che la funzione è strettamente crescente sull'intervallo, dunque tale punto è unico. Analogamente si può procedere sugli intervalli $]-\infty, x_1[$ e $]x_1, 0]$ provando l'esistenza, rispettivamente, di altri due punti x_5 e x_4 dove la funzione si annulla. In definitiva si ha che

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]x_5, x_1[\cup]x_1, x_4[\cup]x_3, x_2[\cup]x_2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = x_5, \text{ oppure } x = x_4, \text{ oppure } x = x_3 \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, x_5[\cup]x_4, x_3[. \end{cases}$$

In pratica poi i punti x_5, x_1, x_4 sono molto vicini fra loro e sono indistinguibili nella figura.

4. Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di una funzione $h(x)$ è

$$P_3(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{6}x^3\,.$$

Basta allora calcolare $h(0) = 1$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$.

a. Si ha

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= -\operatorname{sen}(3x-x^2)(3-2x), \\ h_1''(x) &= -\cos(3x-x^2)(3-2x)^2 + 2\operatorname{sen}(3x-x^2), \\ h_1'''(x) &= \operatorname{sen}(3x-x^2)(3-2x)^3 - \cos(3x-x^2)2(3-2x)(-2) + 2\cos(3x-x^2)(3-2x). \end{aligned}$$

Quindi $h_1'(0) = 0$, $h_1''(0) = -9$, $h_1'''(0) = 18$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 1 + \frac{-9}{2}x^2 + \frac{18}{6}x^3 = x - \frac{9}{2}x^2 + 3x^3\,.$$

Alternativamente, sfruttando lo sviluppo di Taylor della funzione coseno in $x_0 = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \cos(3x-x^2) &= 1 - \frac{(3x-x^2)^2}{2} + o\big((3x-x^2)^3\big) = 1 - \frac{1}{2}\big((3x)^2 - 2(3x)(x^2)\big) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{9}{2}x^2 + 3x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue che $P_3(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + 3x^3$.

b. Si ha

$$
\begin{aligned}
h_2'(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(2\cos(2x)+6\operatorname{sen}(3x)),\\
h_2''(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(2\cos(2x)+6\operatorname{sen}(3x))^2 + e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(-4\operatorname{sen}(2x)+18\cos(3x))\\
h_2'''(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(2\cos(2x)+6\operatorname{sen}(3x))^3 +\\
&\qquad + e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}2(2\cos(2x)+6\operatorname{sen}(3x))(-4\operatorname{sen}(2x)+18\cos(3x)) +\\
&\qquad + e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(2\cos(2x)+6\operatorname{sen}(3x))(-4\operatorname{sen}(2x)+18\cos(3x)) +\\
&\qquad + e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)}(-8\cos(2x)-54\operatorname{sen}(3x)).
\end{aligned}
$$

Quindi $h_2(0) = e^{-2}$, $h_2'(0) = 2e^{-2}$, $h_2''(0) = 22e^{-2}$, $h_2'''(0) = 108e^{-2}$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = e^{-2} + 2e^{-2}x + \frac{22e^{-2}}{2}x^2 + \frac{108e^{-2}}{6}x^3 = e^{-2}(1+2x+11x^2+18x^3)\,.$$

Alternativamente, si possono sfruttare gli sviluppi di Taylor delle funzioni seno e coseno in $x_0 = 0$, e quello dell'esponenziale in $y_0 = \operatorname{sen} 0 - 2\cos 0 = -2$. Si ha

$$
\begin{gathered}
\operatorname{sen}(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3), \qquad \cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^3),\\
e^y = e^{-2} + e^{-2}(y+2) + \frac{e^{-2}}{2}(y+2)^2 + \frac{e^{-2}}{6}(y+2)^3 + o((y+2)^3),
\end{gathered}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(3x) &= -2 + 2x + 9x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),\\
e^{\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)} &= e^{-2} + e^{-2}(2x+9x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)) + \frac{e^{-2}}{2}(2x+9x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3))^2 +\\
&\quad + \frac{e^{-2}}{6}(2x+9x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3))^3 + o\big((2x+9x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3))^3\big) =\\
&= e^{-2}\Big(1 + (2x+9x^2-\frac{4}{3}x^3) + \frac{1}{2}((2x)^2+2(2x)(9x^2)) + \frac{1}{6}(2x)^3\Big) + o(x^3) =\\
&= e^{-2}(1+2x+11x^2+18x^3) + o(x^3).
\end{aligned}
$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = e^{-2}(1+2x+11x^2+18x^3)$.

c. In questo caso conviene utilizzare gli sviluppi. Infatti

$$h_3(x) = x^3\big(x^5 + o(x^5)\big) = x^8 + x^3\,o(x^5) = o(x^7)\,.$$

Quindi banalmente $P_7(x) = 0$ è il polinomio nullo.
Alternativamente si possono calcolare le derivate successive fino all'ordine 7, verificando che si annullano tutte in $x_0 = 0$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 1º aprile 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove lecito) il Teorema de L'Hôpital oppure gli sviluppi di Taylor

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{-\frac{5}{(x-1)^2}} - 2\arctan x}{7\log x - 3x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(5x - x^2) - \operatorname{sen}(2x)}{e^{2x} - \cos(3x) - 7x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{2\arctan(4x^2) - \pi}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)}{x(1 - \cos(2x))}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - 3\log(2 + x)}{\tan x}$,

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{3 + 4\log x}{2 + 3\log x}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = 5 + 2x + \log|x^2 + 2x - 1|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** determinare gli eventuali asintoti; **c)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** utilizzando opportunamente il Teorema degli Zeri e i risultati dei punti precedenti, studiare qualitativamente gli zeri di g; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $h_1(x) = \operatorname{sen}(2x - x^2)$ di ordine 3, (b) $h_2(x) = e^{2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x}$ di ordine 3,

(c) $h_3(x) = x^3\left(e^{x^5} - 1\right)$ di ordine 7.

Punti: 2+2+2+2+2, 7, 9, 3+3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 1 aprile 2003

Svolgimento

1. a. Il limite richiesto non è in forma indeterminata. Infatti poiché la funzione $\frac{5}{(x-1)^2}$ tende a $+\infty$ e quindi $e^{-5/(x-1)^2}$ tende a 0, il numeratore tende a $-2\arctan 1 = -\pi/2$, mentre il denominatore tende a -3. Quindi il limite richiesto è $\pi/6$.

b. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(5x-x^2)-\operatorname{sen}(2x)}{e^{2x}-\cos(3x)-7x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(5x-x^2)^2}}(5-2x)-2\cos(2x)}{2e^{2x}+3\operatorname{sen}(3x)-14x} = \frac{5-2}{2+0} = \frac{3}{2}\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 3/2.
Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\operatorname{arcsen} y = y + o(y), \qquad \operatorname{sen} y = y + o(y), \qquad e^y = 1 + y + o(y), \qquad \cos y = 1 + o(y)\,,$$

si ha

$$\operatorname{arcsen}(5x-3x^2) - \operatorname{sen}(2x) = (5x-3x^2) + o(5x-3x^2) - (2x + o(2x)) = 3x + o(x),$$
$$e^{2x} - \cos(3x) - 7x^2 = 1 + 2x + o(2x) - (1 + o(x)) - 7x^2 = 2x + o(x),$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(5x-3x^2)-\operatorname{sen}(2x)}{e^{2x}-\cos(3x)-7x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{2x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{o(x)}{x}}{2+\frac{o(x)}{x}} = \frac{3}{2}\,.$$

c. Poiché $\lim_{y\to+\infty}\arctan y = \pi/2$, il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{2\arctan(4x^2)-\pi} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1-2/x^2}\left(\dfrac{4}{x^3}\right)}{\dfrac{2}{1+(4x^2)^2}\,8x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+16x^4}{4x^4-8x^2} = \frac{16}{4} = 4\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 4.

d. Si può applicare de L'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}(e^{2x}-1)}{x(1-\cos(2x))} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}2\cos x-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}2}{(1-\cos(2x))+x\operatorname{sen}(2x)2} = \left[\frac{0}{0}\right]\\
&\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\operatorname{sen}x}4\cos^2 x-e^{2\operatorname{sen}x}2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}4-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}4}{2\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen}(2x)+4x\cos(2x)} = \left[\frac{0}{0}\right]\\
&\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\Big(e^{2\operatorname{sen}x}8\cos^3 x-e^{2\operatorname{sen}x}8\operatorname{sen}x\cos x-e^{2\operatorname{sen}x}4\operatorname{sen}x\cos x-e^{2\operatorname{sen}x}2\cos x\\
&\quad+\cos(e^{2x}-1)e^{6x}8+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}16+\operatorname{sen}(e^{2x}-1)e^{4x}8-\\
&\quad-\cos(e^{2x}-1)e^{2x}8\Big)\Big/\Big(8\cos(2x)+4\cos(2x)-4x\operatorname{sen}(2x)2\Big) = \frac{8-2+8-8}{8+4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen} y = y + o(y), \qquad \operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$
$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
x(1-\cos(2x)) &= x\Big(1 - \Big(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(2x)\Big)\Big) = 2x^3 + o(x^3),\\
e^{2x} - 1 &= \Big(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o\big((2x)^3\big)\Big) - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),\\
\operatorname{sen}(e^{2x} - 1) &= \Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big) - \frac{1}{6}\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3 +\\
&\quad + o\Big(\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3\Big) =\\
&= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 2x + 2x^2 + o(x^3),\\
e^{2\operatorname{sen} x} &= 1 + \Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) + \frac{1}{2}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^3 +\\
&\quad + o\Big((2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3))^3\Big) =\\
&= 1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\operatorname{Num}(x)$ è

$$\operatorname{Num}(x) = \big(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)\big) - 1 - \big(2x + 2x^2 + o(x^3)\big) = x^3 + o(x^3)\,.$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)}{x(1-\cos(2x))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{2}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $1/2$.

e. Il limite si presenta nella forma $[\frac{-3\log 2}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a $-3\log 2$ quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Quindi la funzione è positiva in un intorno sinistro di 0, e negativa in un intorno destro. Concludendo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x - 3\log(2+x)}{\tan x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x - 3\log(2+x)}{\tan x} = -\infty\,,$$

dunque il limite non esiste.

2. a-b-c) La funzione è definita per $x > 0$ e $2 + 3\log x \neq 0$, quindi il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{x > 0,\ x \neq e^{-2/3}\}$. Segno: si ha $3 + 4\log x \geq 0$ se e solo se $x \geq e^{-3/4}$, mentre $2 + 3\log x > 0$ se e solo se $x > e^{-2/3}$. Allora

$$f(x)\begin{cases} < 0, & \text{se } e^{-3/4} < x < e^{-2/3},\\ = 0, & \text{se } x = e^{-3/4},\\ > 0, & \text{se } 0 < x < e^{-3/4} \text{ oppure } x > e^{-2/3}. \end{cases}$$

Dallo studio del segno risulta anche

$$\lim_{x\to(e^{-2/3})^\pm} f(x) = \left[\frac{3-8/3}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{\log x}+4}{\frac{2}{\log x}+3} = \frac{4}{3}, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{3}{\log x}+4}{\frac{2}{\log x}+3} = \frac{4}{3}.$$

Quindi la retta di equazione $x = e^{-2/3}$ è un asintoto verticale, mentre quella di equazione $y = 4/3$ è un asintoto orizzontale.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{x}(2+3\log x) - (3+4\log x)\frac{3}{x}}{(2+3\log x)^2} = -\frac{1}{x(2+3\log x)^2}\,.$$

Quindi la derivata prima è sempre negativa sul dominio di definizione, perciò f è decrescente su $]0, e^{-2/3}[$ e su $]e^{-2/3}, +\infty[$. La funzione non ammette massimi/minimi relativi né assoluti.

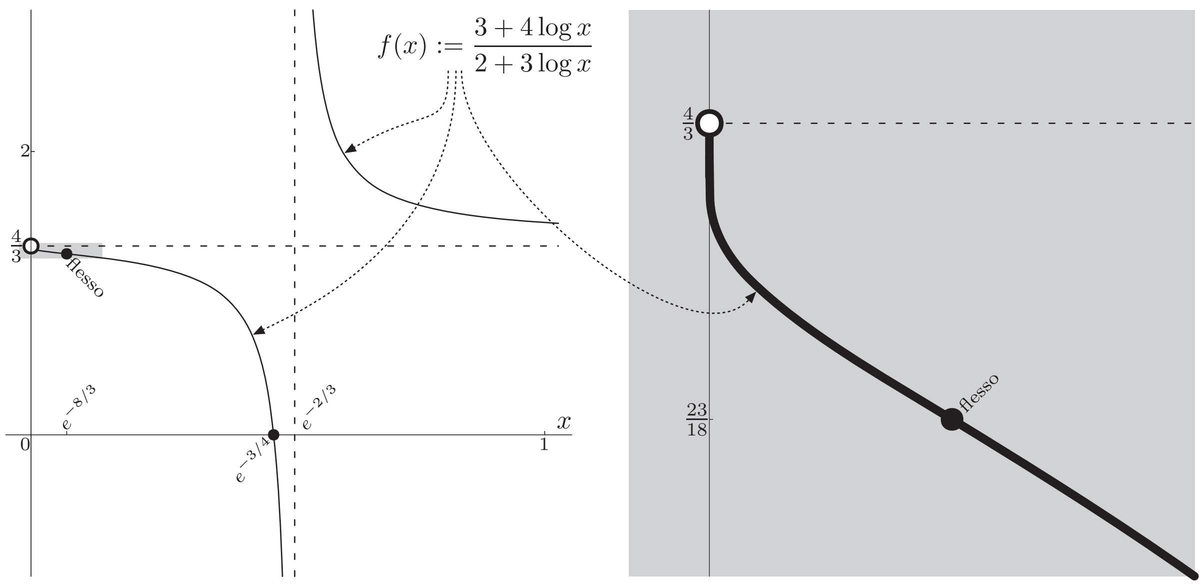
e. La derivata seconda è

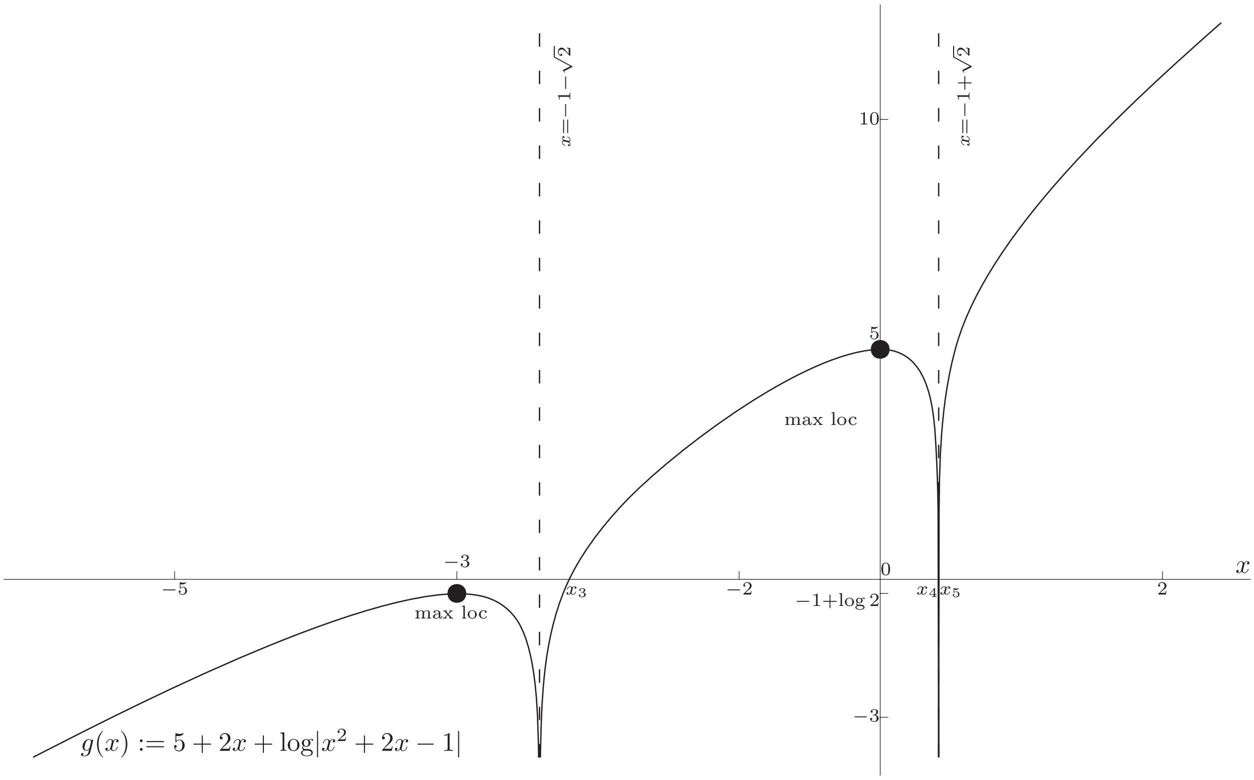
$$f''(x) = \frac{(2+3\log x)^2 + x\cdot 2(2+3\log x)\frac{3}{x}}{x^2(2+3\log x)^4} = \frac{3\log x+8}{x^2(2+3\log x)^3}\,.$$

Il numeratore è positivo se $x > e^{-8/3}$, il denominatore se $x > e^{-2/3}$. Perciò

$$f''(x)\begin{cases} <0, & \text{se } e^{-8/3} < x < e^{-2/3},\\ =0, & \text{se } x = e^{-8/3},\\ >0, & \text{se } 0 < x < e^{-8/3} \text{ oppure } x > e^{-2/3}.\end{cases}$$

Quindi la funzione è concava su $]e^{-8/3}, e^{-2/3}[$, è convessa su $]0, e^{-8/3}[$ e su $]e^{-2/3}, +\infty[$. In $x = e^{-8/3}$ presenta un punto di flesso. Nella figura la zona del punto di flesso è evidenziata con sfondo grigio, e ingrandita a destra con scala diversa.





3. a. La funzione è definita per $x^2 + 2x - 1 \neq 0$ ovvero per $x \neq x_1 := -1 - \sqrt{2}$ e $x \neq x_2 := -1 + \sqrt{2}$, pertanto il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$.
Poiché $\lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty$ si ottiene che

$$\lim_{x \to -1-\sqrt{2}} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1+\sqrt{2}} g(x) = -\infty\,,$$

Gli altri due limiti da calcolare sono

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \Big(x \Big(\frac{5}{x} + 2 + \frac{\log|x^2 + 2x - 1|}{x} \Big) \Big) = [-\infty \cdot (0 + 2 + 0)] = -\infty,$$

essendo $\lim_{x \to -\infty} \frac{\log|x^2+2x-1|}{x} = 0$ (usare ad esempio de l'Hôpital).

b. Per quanto visto sopra, le rette di equazione $x = -1 - \sqrt{2}$ e $x = -1 + \sqrt{2}$ sono asintoti verticali. Inoltre, come sopra si verifica che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 2\,,$$

ma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(g(x) - 2x \big) = \lim_{x \to \pm\infty} (5 + \log|x^2 + 2x - 1|) = +\infty\,,$$

perciò non esistono asintoti obliqui.

c. Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 2x - 1}(2x + 2) = 2\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 1}\,.$$

Il denominatore è positivo per $x < x_1$ oppure $x > x_2$, mentre il numeratore è positivo per $x < -3$ oppure $x > 0$. Ricapitolando, si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x < -3, \text{ oppure } x_1 < x < 0 \text{ oppure } x > x_2 \\ = 0, & \text{se } x = -3, \text{ oppure } x = 0 \\ < 0, & \text{se } -3 < x < x_1 \text{ oppure } 0 < x < x_2. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-\infty, -3[$, su $]x_1, 0[$ e su $]x_2, +\infty[$ mentre è decrescente su $]-3, x_1[$ e su $]0, x_2[$. In $x = -3$ e $x = 0$ la funzione ammette due massimi relativi.

d. La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{(2x+3)(x^2+2x-1) - (x^2+3x)(2x+2)}{(x^2+2x-1)^2} = -2\frac{x^2+2x+3}{(x^2+2x-1)^2}\,.$$

Poiché, limitatamente al dominio, la derivata seconda è sempre negativa si ha che la funzione è concava su $]-\infty, x_1[$, su $]x_1, x_2[$ e su $]x_2, +\infty[$.

e. Applicando una delle conseguenze del Teorema degli Zeri all'intervallo $]x_1, 0]$, poiché $g(0) = 5 > 0$ e $\lim_{x\to x_1^+} g(x) = -\infty$, si ottiene che esiste $x_3 \in]x_1, 0[$ tale che $g(x_3) = 0$. Dal punto c) si osserva che la funzione è strettamente crescente sull'intervallo, dunque tale punto è unico. Analogamente si può procedere sugli intervalli $[0, x_2[$ e $]x_2, +\infty[$ provando l'esistenza, rispettivamente, di altri due punti x_4 e x_5 dove la funzione si annulla. In definitiva si ha che

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]x_3, x_4[\cup]x_5, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = x_3, \text{ oppure } x = x_4, \text{ oppure } x = x_5 \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_3[\cup]x_4, x_2[\cup]x_2, x_5[. \end{cases}$$

4. Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di una funzione $h(x)$ è

$$P_3(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{6}x^3\,.$$

Basta allora calcolare $h(0) = 0$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$.

a. Si ha

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= \cos(2x - x^2)(2-2x), \\ h_1''(x) &= -\operatorname{sen}(2x-x^2)(2-2x)^2 - 2\cos(2x-x^2), \\ h_1'''(x) &= -\cos(2x-x^2)(2-2x)^3 - \operatorname{sen}(2x-x^2)2(2-2x)(-2) + 2\operatorname{sen}(2x-x^2)(2-2x). \end{aligned}$$

Quindi $h_1'(0) = 2$, $h_1''(0) = -2$, $h_1'''(0) = -8$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 2x + \frac{-2}{2}x^2 + \frac{-8}{6}x^3 = 2x - x^2 - \frac{4}{3}x^3\,.$$

Alternativamente, sfruttando lo sviluppo di Taylor della funzione seno in $x_0 = 0$ si ha

$$\operatorname{sen}(2x-x^2) = (2x-x^2) - \frac{1}{6}(2x-x^2)^3 + o\big((2x-x^2)^3\big) = 2x - x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

Dall'unicità dello sviluppo segue che $P_3(x) = 2x - x^2 - \frac{4}{3}x^3$.

b. Si ha

$$\begin{aligned}
h_2'(x) &= e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(-4\operatorname{sen}(2x)+3\cos x),\\
h_2''(x) &= e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(-4\operatorname{sen}(2x)+3\cos x)^2 - e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(8\cos(2x)+3\operatorname{sen}x)\\
h_2'''(x) &= e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(-4\operatorname{sen}(2x)+3\cos x)^3 +\\
&\qquad + e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}2(-4\operatorname{sen}(2x)+3\cos x)(-8\cos(2x)-3\operatorname{sen}x) -\\
&\qquad - e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(-4\operatorname{sen}(2x)+3\cos x)(8\cos(2x)+3\operatorname{sen}x) -\\
&\qquad - e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x}(-16\operatorname{sen}(2x)+3\cos x).
\end{aligned}$$

Quindi $h_2(0) = e^2$, $h_2'(0) = 3e^2$, $h_2''(0) = e^2$, $h_2'''(0) = -48e^2$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = e^2 + 3e^2 x + \frac{e^2}{2}x^2 + \frac{-48e^2}{6}x^3 = e^2\Big(1 + 3x + \frac{x^2}{2} - 8x^3\Big).$$

Alternativamente, si possono sfruttare gli sviluppi di Taylor delle funzioni seno e coseno in $x_0 = 0$, e quello dell'esponenziale in $y_0 = 2\cos 0 + 3\operatorname{sen} 0 = 2$. Si ha

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3),\\
e^y = e^2 + e^2(y-2) + \frac{e^2}{2}(y-2)^2 + \frac{e^2}{6}(y-2)^3 + o((y-2)^3),
\end{gathered}$$

per cui

$$\begin{aligned}
2\cos(2x) + 3\operatorname{sen}x &= 2 + 3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3),\\
e^{2\cos(2x)+3\operatorname{sen}x} &= e^2 + e^2(3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)) + \frac{e^2}{2}(3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3))^2 +\\
&\quad + \frac{e^2}{6}(3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3))^3 + o\big((3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3))^3\big) =\\
&= e^2 + e^2(3x - 4x^2 - \frac{x^3}{2}) + \frac{e^2}{2}((3x)^2 + 2(3x)(-4x^2)) + \frac{e^2}{6}(3x)^3 + o(x^3) =\\
&= e^2\Big(1 + 3x + \frac{x^2}{2} - 8x^3\Big) + o(x^3).
\end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = e^2\Big(1 + 3x + \frac{x^2}{2} - 8x^3\Big)$.

c. In questo caso conviene utilizzare gli sviluppi. Infatti

$$h_3(x) = x^3\big((1 + x^5 + o(x^5)) - 1\big) = x^8 + x^3\, o(x^5) = o(x^7).$$

Quindi banalmente $P_7(x) = 0$ è il polinomio nullo.
Alternativamente si possono calcolare le derivate successive fino all'ordine 7, verificando che si annullano tutte in $x_0 = 0$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 1° aprile 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove lecito) il Teorema de L'Hôpital oppure gli sviluppi di Taylor

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x) - 2e^{5x}}{\operatorname{sen} x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)}{2x(1 - \cos(3x))}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x - 5x^2) - \operatorname{sen}(4x)}{e^{2x} - \cos(2x) + 3x^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{2\arctan(3x^2) - \pi}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{7e^{-\frac{2}{(x-1)^2}} + \arctan x}{2\log x + 3x}$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2\log x - 5}{4\log x - 1}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** trovare gli eventuali asintoti; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità. **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = 2x - 1 - \log|x^2 + 2x - 1|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** determinare gli eventuali asintoti; **c)** calcolare la derivata prima e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo/minimo locale e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** utilizzando opportunamente il Teorema degli Zeri e i risultati dei punti precedenti, studiare qualitativamente gli zeri di g; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati in $x_0 = 0$:

(a) $h_1(x) = \cos(x + 3x^2)$ di ordine 3, (b) $h_2(x) = e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}$ di ordine 3,

(c) $h_3(x) = x^5 \operatorname{sen}(x^3)$ di ordine 7.

Punti: 2+2+2+2+2, 7, 9, 3+3+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 1 aprile 2003

Svolgimento

1. a. Il limite si presenta nella forma $[\frac{-2}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a -2 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Quindi la funzione è positiva in un intorno sinistro di 0, e negativa in un intorno destro. Concludendo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(3x) - 2e^{5x}}{\operatorname{sen} x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(3x) - 2e^{5x}}{\operatorname{sen} x} = -\infty\,,$$

dunque il limite non esiste.

b. Si può applicare de L'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)}{2x(1 - \cos(3x))} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} 2\cos x - \cos(e^{2x} - 1)e^{2x}2}{2(1 - \cos(3x)) + 2x\operatorname{sen}(3x)3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x}4\cos^2 x - e^{2\operatorname{sen} x}2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)e^{4x}4 - \cos(e^{2x} - 1)e^{2x}4}{6\operatorname{sen}(3x) + 6\operatorname{sen}(3x) + 6x\cos(3x)3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\Big(e^{2\operatorname{sen} x}8\cos^3 x - e^{2\operatorname{sen} x}8\operatorname{sen} x\cos x - e^{2\operatorname{sen} x}4\operatorname{sen} x\cos x - e^{2\operatorname{sen} x}2\cos x +$$

$$+ \cos(e^{2x} - 1)e^{6x}8 + \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)e^{4x}16 + \operatorname{sen}(e^{2x} - 1)e^{4x}8 - \cos(e^{2x} - 1)e^{2x}8\Big)/$$

$$\Big(12\cos(3x)3 + 18\cos(3x) - 18x\operatorname{sen}(3x)3\Big) = \frac{8 - 2 + 8 - 8}{36 + 18} = \frac{1}{9}.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 3 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3),$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$

si ottiene

$$2x(1 - \cos(3x)) = 2x\Big(1 - \Big(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o\big((3x)^2\big)\Big)\Big) = 9x^3 + o(x^3),$$

$$e^{2x} - 1 = \Big(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o\big((2x)^3\big)\Big) - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sen}(e^{2x} - 1) = \Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big) - \frac{1}{6}\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3 +$$

$$+ o\Big(\Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big)^3\Big) =$$

$$= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 2x + 2x^2 + o(x^3),$$

$$e^{2\operatorname{sen} x} = 1 + \Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) + \frac{1}{2}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^3 +$$

$$+ o\Big((2x - 2\frac{x^3}{6} + o(x^3))^3\Big) =$$

$$= 1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{6}8x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = \big(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)\big) - 1 - \big(2x + 2x^2 + o(x^3)\big) = x^3 + o(x^3)\,.$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\,\mathrm{sen}\,x} - 1 - \mathrm{sen}(e^{2x} - 1)}{2x(1 - \cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{9x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{9 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{9}\,.$$

Il limite richiesto vale allora $1/9$.

c. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata $0/0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsen}(x - 5x^2) - \mathrm{sen}(4x)}{e^{2x} - \cos(2x) + 3x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x-5x^2)^2}}\,(1 - 5x) - 4\cos(4x)}{2e^{2x} + 2\,\mathrm{sen}(2x) + 6x} = \frac{1 - 4}{2 + 0} = -\frac{3}{2}\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-3/2$.
Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\mathrm{arcsen}\,y = y + o(y), \qquad \mathrm{sen}\,y = y + o(y), \qquad e^y = 1 + y + o(y), \qquad \cos y = 1 + o(y)\,,$$

si ha

$$\begin{gathered}\mathrm{arcsen}(x - 5x^2) - \mathrm{sen}(4x) = (x - 5x^2) + o((x - 5x^2)) - (4x + o(4x)) = -3x + o(x),\\ e^{2x} - \cos(2x) + 6x^2 = 1 + 2x + o(2x) - (1 + o(2x)) + 6x^2 = 2x + o(x),\end{gathered}$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsen}(x - 5x^2) - \mathrm{sen}(4x)}{e^{2x} - \cos(2x) + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3 + \frac{o(x)}{x}}{2 + \frac{o(x)}{x}} = -\frac{3}{2}\,.$$

d. Poiché $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \pi/2$, il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(1 + \dfrac{4}{x^2}\Big)}{2\arctan(3x^2) - \pi} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1 + 4/x^2}\Big(-\dfrac{8}{x^3}\Big)}{\dfrac{2}{1 + (3x^2)^2}\,6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8(1 + 9x^4)}{12x^4 + 48x^2} = -\frac{72}{12} = -6\,.$$

Per il Teorema di de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale -6.

e. Il limite richiesto non è in forma indeterminata. Infatti poiché la funzione $\frac{2}{(x-1)^2}$ tende a $+\infty$ e quindi $e^{-2/(x-1)^2}$ tende a 0, il numeratore tende a $\arctan 1 = \pi/4$, mentre il denominatore tende a 3. Quindi il limite richiesto è $\pi/12$.

2. a-b-c) La funzione è definita per $x > 0$ e $4\log x - 1 \neq 0$, quindi il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{x > 0,\ x \neq e^{1/4}\}$.
Segno: si ha $2\log x - 5 \geq 0$ se e solo se $x \geq e^{5/2}$, mentre $4\log x - 1 > 0$ se e solo se $x > e^{1/4}$. Allora

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } e^{1/4} < x < e^{5/2},\\ = 0, & \text{se } x = e^{5/2},\\ > 0, & \text{se } 0 < x < e^{1/4} \text{ oppure } x > e^{5/2}. \end{cases}$$

Dallo studio del segno risulta anche

$$\lim_{x\to(e^{1/4})^\pm} f(x) = \left[\frac{1/2 - 5}{0^\pm}\right] = \mp\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{5}{\log x}}{4 - \frac{1}{\log x}} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - \frac{5}{\log x}}{4 - \frac{1}{\log x}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi la retta di equazione $x = e^{1/4}$ è un asintoto verticale, mentre quella di equazione $y = 1/2$ è un asintoto orizzontale.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(4\log x - 1) - (2\log x - 5)\frac{4}{x}}{(4\log x - 1)^2} = \frac{18}{x(4\log x - 1)^2}\,.$$

Quindi la derivata prima è sempre positiva sul dominio di definizione, perciò f è crescente su $]0, e^{1/4}[$ e su $]e^{1/4}, +\infty[$. La funzione non ammette massimi/minimi relativi né assoluti.

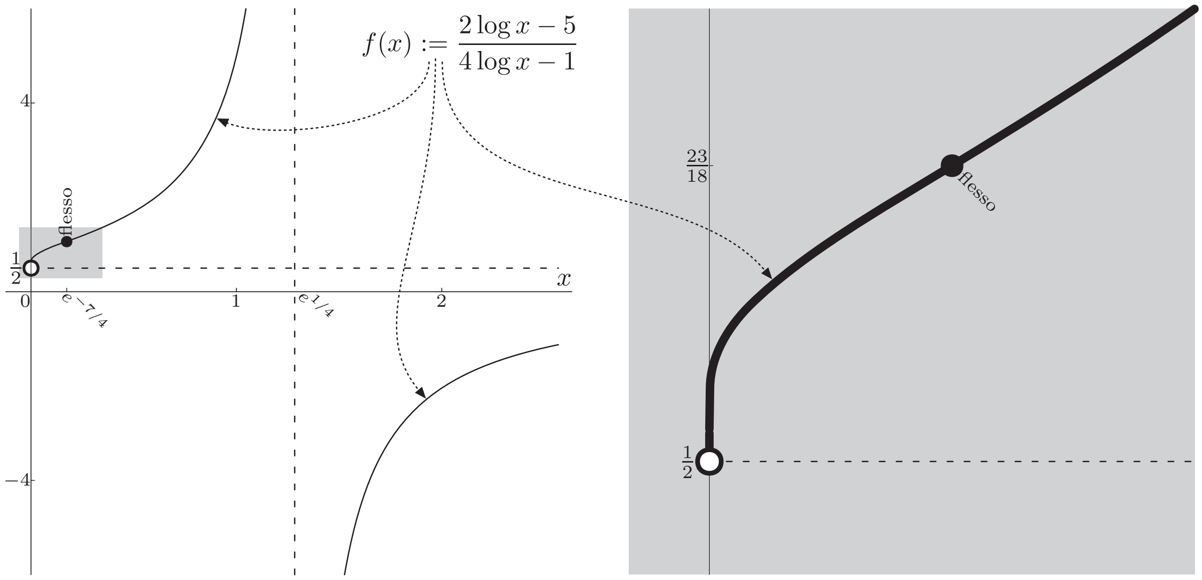
e. La derivata seconda è

$$f''(x) = -18\frac{(4\log x - 1)^2 + x\cdot 2(4\log x - 1)\frac{4}{x}}{x^2(4\log x - 1)^4} = \frac{-18(4\log x + 7)}{x^2(4\log x - 1)^3}\,.$$

Il numeratore è positivo se $x < e^{-7/4}$, il denominatore se $x > e^{1/4}$. Perciò

$$f''(x)\begin{cases} > 0, & \text{se } e^{-7/4} < x < e^{1/4},\\ = 0, & \text{se } x = e^{-7/4},\\ < 0, & \text{se } 0 < x < e^{-7/4} \text{ oppure } x > e^{1/4}.\end{cases}$$

Quindi la funzione è convessa su $]e^{-7/4}, e^{1/4}[$, mentre è concava su $]0, e^{-7/4}[$ e su $]e^{1/4}, +\infty[$. In $x = e^{-7/4}$ presenta un punto di flesso.



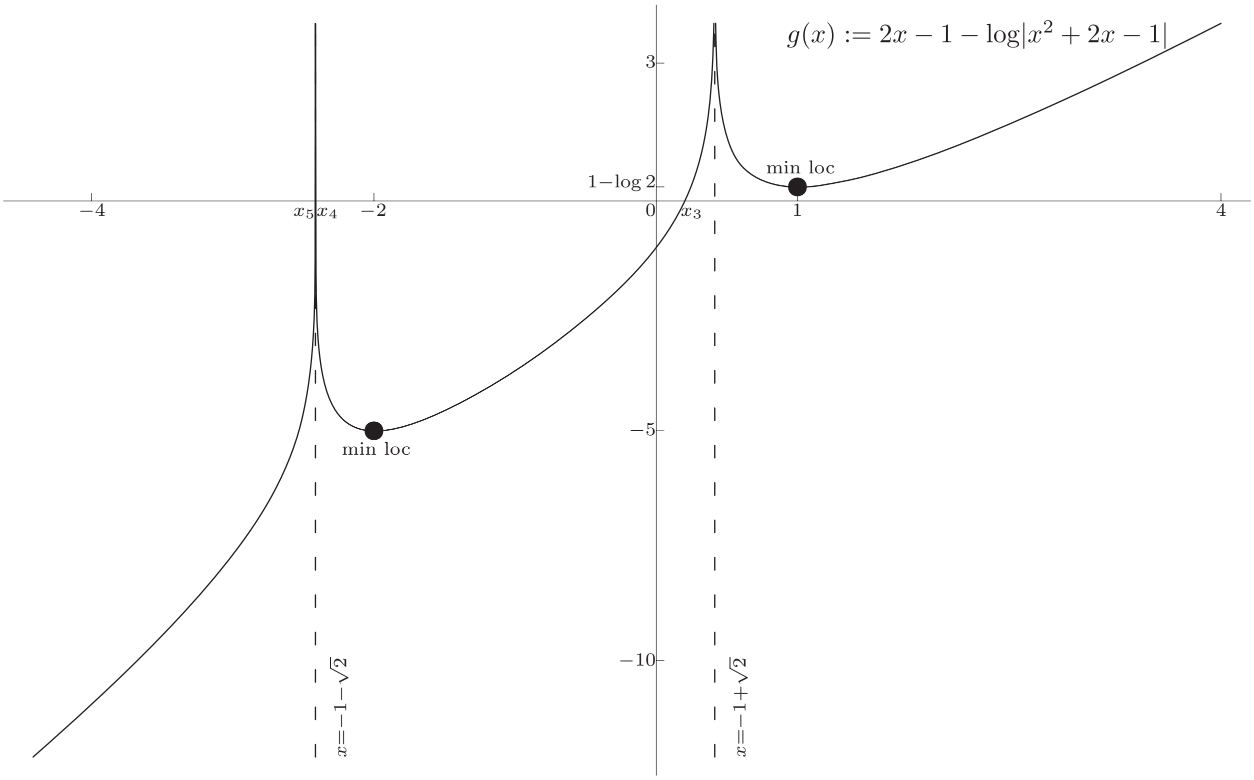
3. a. La funzione è definita per $x^2 + 2x - 1 \neq 0$ ovvero per $x \neq x_1 := -1 - \sqrt{2}$ e $x \neq x_2 := -1 + \sqrt{2}$, pertanto il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$.
Poiché $\lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty$ si ottiene che

$$\lim_{x\to -1-\sqrt{2}} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1+\sqrt{2}} g(x) = +\infty\,,$$

Gli altri due limiti da calcolare sono

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{\log|x^2+2x-1|}{x}\right)\right) = [+\infty\cdot(2-0-0)] = +\infty,$$

essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log|x^2+2x-1|}{x} = 0$ (usare ad esempio de l'Hôpital).



b. Per quanto visto sopra, le rette di equazione $x = -1 - \sqrt{2}$ e $x = -1 + \sqrt{2}$ sono asintoti verticali. Inoltre, come sopra si verifica che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 2\,,$$

ma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(g(x) - 2x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} (-1 - \log|x^2 - 4x + 2|) = -\infty\,,$$

perciò non esistono asintoti obliqui.

c. Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2 + 2x - 1}(2x + 2) = 2\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 1}\,.$$

Il denominatore è positivo per $x < x_1$ oppure $x > x_2$, mentre il numeratore è positivo per $x < -2$ oppure $x > 1$. Ricapitolando, si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x < x_1, \text{ oppure } -2 < x < x_2 \text{ oppure } x > 1 \\ = 0, & \text{se } x = -2, \text{ oppure } x = 1 \\ < 0, & \text{se } x_1 < x < -2 \text{ oppure } x_2 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-\infty, x_1[$, su $]-2, x_2[$ e su $]1, +\infty[$ mentre è decrescente su $]x_1, -2[$ e su $]x_2, 1[$. In $x = -2$ e $x = 1$ la funzione ammette due minimi relativi.

d. La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{(2x + 1)(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + x - 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^2} = 2\frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x - 1)^2}\,.$$

Poiché, limitatamente al dominio, la derivata seconda è sempre positiva si ha che la funzione è convessa su $]-\infty, x_1[$, su $]x_1, x_2[$ e su $]x_2, +\infty[$.

e. Applicando una delle conseguenze del Teorema degli Zeri all'intervallo $[-2, x_2[$, poiché $g(-2) = -5 < 0$ e $\lim_{x\to x_2^-} g(x) = +\infty$, si ottiene che esiste $x_3 \in]-2, x_2[$ tale che $g(x_3) = 0$. Dal punto c) si osserva che la funzione è strettamente crescente sull'intervallo, dunque tale punto è unico. Analogamente si può procedere sugli intervalli $]x_1, -2]$ e $]-\infty, x_1[$ provando l'esistenza, rispettivamente, di altri due punti x_4 e x_5 dove la funzione si annulla. In definitiva si ha che

$$g(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]x_4, x_3[\cup]-\infty, x_5[\\ = 0, & \text{se } x = x_3, \text{ oppure } x = x_4, \text{ oppure } x = x_5 \\ > 0, & \text{se } x \in]x_5, x_1[\cup]x_1, x_4[\cup]x_3, x_2[\cup]x_2, +\infty[. \end{cases}$$

4. Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di una funzione $h(x)$ è

$$P_3(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{6}x^3 .$$

Basta allora calcolare $h(0) = 1$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$.

a. Si ha

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= -\operatorname{sen}(x + 3x^2)(1 + 6x), \\ h_1''(x) &= -\cos(x + 3x^2)(1 + 6x)^2 - 6\operatorname{sen}(x + 3x^2), \\ h_1'''(x) &= \operatorname{sen}(x + 3x^2)(1 + 6x)^3 - \cos(x + 3x^2)2(1 + 6x)6 - 6\cos(x + 3x^2)(1 + 6x). \end{aligned}$$

Quindi $h_1'(0) = 0$, $h_1''(0) = -1$, $h_1'''(0) = -18$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 1 + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{-18}{6}x^3 = 1 - \frac{x^2}{2} - 3x^3 .$$

Alternativamente, sfruttando lo sviluppo di Taylor della funzione seno in $x_0 = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \cos(x + 3x^2) &= 1 - \frac{1}{2}(x + 3x^2)^2 + o\big((x + 3x^2)^3\big) = 1 - \frac{1}{2}\big(x^2 + 2x(3x^2)\big) + o(x^3) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - 3x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue che $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - 3x^3$.

b. Si ha

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x), \\ h_2''(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x)^2 + e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(-4\operatorname{sen}(2x) + 3\cos x) \\ h_2'''(x) &= e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x)^3 + \\ &\quad + e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}2(2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x)(-4\operatorname{sen}(2x) + 3\cos x) + \\ &\quad + e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(2\cos(2x) + 3\operatorname{sen} x)(-4\operatorname{sen}(2x) + 3\cos x) + \\ &\quad + e^{\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x}(-8\cos(2x) - 3\operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

Quindi $h_2(0) = e^{-3}$, $h_2'(0) = 2e^{-3}$, $h_2''(0) = 7e^{-3}$, $h_2'''(0) = 18e^{-3}$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = e^{-3} + 2e^{-3}x + \frac{7e^{-3}}{2}x^2 + \frac{18e^{-3}}{6}x^3 = e^{-3}\Big(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + 3x^3\Big).$$

Alternativamente, si possono sfruttare gli sviluppi di Taylor delle funzioni seno e coseno in $x_0 = 0$, e quello dell'esponenziale in $y_0 = \operatorname{sen} 0 - 3\cos 0 = -3$. Si ha

$$\operatorname{sen}(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$
$$e^y = e^{-3} + e(y + 3) + \frac{e^{-3}}{2}(y + 3)^2 + \frac{e^{-3}}{6}(y + 3)^3 + o((y + 3)^3),$$

per cui

$$\operatorname{sen}(2x) - 3\cos x = -3 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen}(2x)-3\cos x} &= e^{-3} + e^{-3}(2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) + \frac{e^{-3}}{2}(2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3))^2 + \\ &+ \frac{e^{-3}}{6}(2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3))^3 + o\big((2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3))^3\big) = \\ &= e^{-3} + e^{-3}(2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3) + \frac{e^{-3}}{2}((2x)^2 + 2(2x)(\frac{3}{2}x^2)) + \frac{e^{-3}}{6}(2x)^3 + o(x^3) = \\ &= e^{-3}\Big(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + 3x^3\Big) + o(x^3). \end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = e^{-3}\Big(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + 3x^3\Big)$.

c. In questo caso conviene utilizzare gli sviluppi. Infatti

$$h_3(x) = x^5\big(x^3 + o(x^3)\big) = x^8 + x^5\, o(x^3) = o(x^7)\,.$$

Quindi banalmente $P_7(x) = 0$ è il polinomio nullo.
Alternativamente si possono calcolare le derivate successive fino all'ordine 7, verificando che si annullano tutte in $x_0 = 0$.