Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 20 dicembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5x^2-1}{7x^2+1-2^x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^4+1)+1}{\log(x^3+2)-3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x+3}{2x^2-x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x+4x^2-5}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+5}-\sqrt{3x^2+2x-1}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2-\operatorname{sen}x}{x^2+3x^5}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos(3\sqrt{x})}{(1+\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}(2x)}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+3)-\log(x+1)}{1+e^{-\log^2(4x)}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{5x^2-x\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\cos(2x))+4x^{3/2}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^3-x-1}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{sen}e^x+5}{2x+3}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1+5x}{\log x}$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log(2x-5)-\log\left(x-\sqrt{x^2-5x+4}\right)}.$$

3. Mediante il principio d'induzione, provare che

$$1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n=2^{n+1}(n-1)+2.$$

4. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in in $x=2$ della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases}ax^2+x+a^2 & \text{se } x\geq 2\\ 3a^2x+1 & \text{se } x<2.\end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 20 dicembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-3x^2-x+1}{1+3x^2-x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(5x-2)-\log(2x+3)}{1+e^{-\log^2(3x)}}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right)$ (d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^3-3x^2+5}-\sqrt{4x^2+3}\right)$

(e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{3x^2+x^3+2}$ (f) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x(\cos(2\sqrt{x})-1)}{\operatorname{sen}^2(3x)}$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-2\log(x^2+1)}{3\log(x+2)+1}$ (h) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2^x+1}{3^x+5x^2-2}$

(i) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-2}{\log x}$ (j) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2-\cos 5^x}{e^x+2}$

(k) $\lim_{x\to0} \dfrac{1-3x^2}{\log^2 x}$ (l) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{(1-\cos x)\sqrt{x}+x^2\operatorname{sen} x}{3x^2\operatorname{sen}(2\sqrt{x})+x^2\tan x^{3/2}}$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log(2x-3)-\log\left(x-\sqrt{x^2-3x+2}\right)}.$$

3. Mediante il principio d'induzione, provare che

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=2^{n+1}(n-1)+2.$$

4. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in in $x=0$ della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases} 2(x-a)^2+2 & \text{se } x\ge 0,\\ x^2-3a(x+1)+a^2 & \text{se } x<0.\end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/2003

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 20 dicembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3^x-5}{4^x+5x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{(2+\cos x)(1-\cos x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\log(x^2-5)+7}{2-3\log(x^3+1)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x-x^2}{3x^2+1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{3x^2+x-1}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos x^4+3}{2+3x^3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\operatorname{sen}\sqrt{x}+\operatorname{sen}(2x^2)\tan\sqrt{x}}{2x^3-2(1-\cos\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-2x+5}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(1-x)^2}{\operatorname{sen} x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{2+\operatorname{sen}(\pi x)}{\log^2 x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x+5)-\log(x+1)}{1+e^{-\log^2(2x)}}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{2x^3-3}\right)$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log(2x-6)-\log\left(x-\sqrt{x^2-6x+5}\right)}.$$

3. Mediante il principio d'induzione, provare che

$$1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n=2^{n+1}(n-1)+2.$$

4. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in in $x=1$ della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases}3ax^2+x+a^2 & \text{se } x\geq1,\\ 3x^2+ax+6 & \text{se } x<1.\end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 20 dicembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3}{2x^2-5x^3}$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5-x-2x^3}{x^3+3x^2+1}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3x^2+1}{2x^2+3\cdot 2^x+5}$

(e) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}\tan\sqrt[3]{x^2}+2x^2}{5(1-\cos\sqrt{x})+3\sqrt{x}\,\mathrm{sen}(5x)}$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+7x+3}-\sqrt{2x^2+5x+1}\right)$

(g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\tan(2x)}{\mathrm{sen}\,x^2(1+3\cos x)}$

(h) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(2x+1)-\log(3x-5)}{1+e^{-\log^2(5x)}}$

(i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2}{1+7x^3+x^2}$

(j) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-4}{\tan x}$

(k) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3+\mathrm{sen}\,x^3}{x^2+1}$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x^2+2)-5}{3\log(x+3)+4}$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log(2x-4)-\log\left(x-\sqrt{x^2-4x+3}\right)}.$$

3. Mediante il principio d'induzione, provare che

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=2^{n+1}(n-1)+2.$$

4. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in in $x=1$ della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases} ax^2-a^2x+3 & \text{se } x\ge 1,\\ x+a^2-1 & \text{se } x<1.\end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per ogni altro esercizio.

Soluzioni dei Problemi del Compitino del 20 dicembre 2002

Tema A

1a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5x^2-1}{7x^2+1-2^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4^x}{2^x}\,\frac{1+5x^2/4^x-1/4^x}{7x^2/2^x+1/2^x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\frac{1+5x^2/4^x-1/4^x}{7x^2/2^x+1/2^x-1}\right)=\left[+\infty\cdot\frac{1+0-0}{0+0-1}\right]=-\infty.$$

1b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^4+1)+1}{\log(x^3+2)-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^4(1+1/x^4))+1}{\log(x^3(1+2/x^3))-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\log x+\log(1+1/x^4)+1}{3\log x+\log(1+2/x^3)-3}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{\log(1+1/x^4)+1}{\log x}}{3+\frac{\log(1+2/x^3)-3}{\log x}}=\left[\frac{4+0}{3+0}\right]=\frac{4}{3}.$$

1c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x+3}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\,\frac{1+2/x^2+3/x^3}{2-1/x-1/x^2}\right)=\left[+\infty\cdot\frac{1+0+0}{2-0-0}\right]=+\infty$$

1d)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x+4x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3/x+1/x^2}{2/x+4-5/x^2}=\left[\frac{1-0+0}{0+4-0}\right]=\frac{1}{4}.$$

1e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+5}-\sqrt{3x^2+2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2-x+5)-(3x^2+2x-1)}{\sqrt{3x^2-x+5}+\sqrt{3x^2+2x-1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+6/x}{\sqrt{3-1/x+5/x^2}+\sqrt{3+2/x-1/x^2}}=\left[\frac{-3+0}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1f)

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\sin x}{x^2+3x^5}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{2-\sin x}{1+3x^3}\right)=\left[\frac{1}{0^+}\cdot\frac{2-0}{1+0}\right]=[+\infty\cdot 2]=+\infty.$$

1g)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos(3\sqrt{x})}{(1+\sin x)\sin(2x)}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos(3\sqrt{x})}{(3\sqrt{x})^2}\,\frac{2x}{\sin(2x)}\,\frac{9}{2(1+\sin x)}\right)=\left[\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{9}{2}\right]=\frac{9}{4}.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+3)-\log(x+1)}{1+e^{-\log^2(4x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{1+3/x}{1+1/x}\right)}{1+e^{-\log^2(4x)}}=\left[\frac{\log 1}{1+0}\right]=0.$$

1i)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{5x^2-x\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\cos(2x))+4x^{3/2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{5x^{1/2}-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}+4}=\left[\frac{0-1}{0\cdot(1/2)+4}\right]=-\frac{1}{4}.$$

1j)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^3-x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|^{3/2}\left(\sqrt{2/x-3/x^3}-\sqrt{1-1/x^2-1/x^3}\right)\right)=\left[+\infty\cdot(\sqrt{0}-\sqrt{1})\right]=-\infty.$$

1k)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin e^x+5}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\left((2\sin e^x+5)\frac{1}{2x+3}\right)=[\{\text{funzione limitata}\}\cdot 0]=0.$$

1l) Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $6>0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di 1 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1+5x}{\log x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{1+5x}{\log x}=-\infty.$$

2) Il dominio della funzione è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x-5>0, & (1)\\ x^2-5x+4\geq 0, & (2)\\ x-\sqrt{x^2-5x+4}>0, & (3)\\ \log(2x-5)-\log\left(x-\sqrt{x^2-5x+4}\right)\geq 0, & (4)\end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono $x>5/2$.

Le soluzioni di (2) sono $x\geq 4$ oppure $x\leq 1$, perciò le soluzioni di (1)-(2) sono date dagli $x\geq 4$.

La disequazione si può scrivere $x>\sqrt{x^2-5x+4}$, e siccome dovrà essere $x\geq 4$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo $x^2>x^2-5x+4$ ovvero $x>4/5$. Le soluzioni di (1)-(2)-(3) sono date allora da $x\geq 4$.

Per la monotonia del logaritmo naturale, la disequazione equivale a

$$2x-5>x-\sqrt{x^2-5x+4}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sqrt{x^2-5x+4}\geq 5-x.$$

Le soluzioni sono date dall'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2-5x+4\geq 0,\\ 5-x<0,\end{cases}\qquad\cup\qquad\begin{cases} x^2-5x+4\geq 0,\\ 5-x\geq 0,\\ x^2-5x+4\geq(5-x)^2\end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni $x>5$. La terza disequazione del secondo sistema equivale a $5x-21\geq 0$. Il secondo sistema ha allora soluzioni date da $21/5\leq x\leq 5$. L'intera disequazione (4) ha allora come soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi, ovvero $21/5\leq x$.

Il dominio della funzione è allora $\mathcal{D}=\{x:\ x\geq 21/5\}$.

3) Diciamo $\mathcal{P}(n)$ la proprietà in corrispondenza di n. Applichiamo il Principio d'Induzione. Verifichiamo che $\mathcal{P}(1)$ è vera, infatti

$$1 \cdot 2^1 = 2 = 2^{1+1}(1-1) + 2.$$

Utilizziamo ora l'ipotesi induttiva: supponendo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, verifichiamo che anche $\mathcal{P}(n+1)$ lo è. Se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^1 + & 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n) + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(2n) + 2 = 2^{(n+1)+1}((n+1)-1) + 2 \end{aligned}$$

Quindi anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Per il Principio d'Induzione, la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

4) Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 2 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 4a + 2 + a^2.$$

Il limite sinistro:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6a^2 + 1.$$

Affinché la funzione sia continua in 2 dovrà dunque essere $4a + 2 + a^2 = 6a^2 + 1$ ovvero $5a^2 - 4a - 1 = 0$ che ha come soluzioni $a_1 = 1$, $a_2 = -1/5$. Per tali valori di a la funzione risulta continua in $x = 2$.

Tema B

1a)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 1}{1 + 3x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x \, \frac{2 - 3/x - 1/x^2 + 1/x^3}{1/x^2 + 3 - 1/x} \right) = \left[+\infty \cdot \frac{2 - 0 + 0}{0 + 3 - 0} \right] = +\infty.$$

1b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(5x-2) - \log(2x+3)}{1 + e^{-\log^2(3x)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\frac{5-2/x}{2+3/x}\right)}{1 + e^{-\log^2(3x)}} = \left[\frac{\log(5/2)}{1+0} \right] = \log(5/2).$$

1c)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2x^2 - 3x + 2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - 1/x}{\sqrt{2 + 1/x + 1/x^2} + \sqrt{2 - 3/x + 2/x^2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

1d)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 5} - \sqrt{4x^2 + 3} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(|x|^{3/2} \left(\sqrt{2 - 3/x + 5/x^3} - \sqrt{4/x + 3/x^3} \right) \right) = \left[+\infty \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{0}) \right] = +\infty.$$

1e)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{3x^2+x^3+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-1/x^2}{3/x+1+2/x^3}\right)=\left[0\cdot\frac{1-0}{0+1+0}\right]=0.$$

1f)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x(\cos(2\sqrt{x})-1)}{\sin^2(3x)}=-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos(2\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2}\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^2\frac{4}{9}\right)=-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}.$$

1g)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\log(x^2+1)}{3\log(x+2)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\log(x^2(1+1/x^2))}{3\log(x(1+2/x))+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4\log x-2\log(1+1/x^2)}{3\log x+3\log(1+2/x)+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{1-2\log(1+1/x^2)}{\log x}}{3+\frac{3\log(1+2/x)+1}{\log x}}=\left[\frac{-4+0}{3+0}\right]=-\frac{4}{3}.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2^x+1}{3^x+5x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{3^x}\,\frac{x^2/2^x-1+1/2^x}{1+5x^2/3^x-2/3^x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{x^2/2^x-1+1/2^x}{1+5x^2/3^x-2/3^x}\right)=\left[0\cdot\frac{0-1+0}{1+0-0}\right]=0.$$

1i) Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $-1<0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di 1 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2}{\log x}=-\infty,\qquad\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2}{\log x}=+\infty.$$

1j)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos5^x}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left((2-\cos5^x)\frac{1}{e^x+2}\right)=[\{\text{funzione limitata}\}\cdot0]=0.$$

1k)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\log^2x}=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0.$$

1l)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)\sqrt{x}+x^2\sin x}{3x^2\sin(2\sqrt{x})+x^2\tan x^{3/2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{(1-\cos x)}{x^2}+\sqrt{x}\frac{\sin x}{x}}{6\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+x\frac{\tan x^{3/2}}{x^{3/2}}}=\left[\frac{1/2+0\cdot1}{6\cdot1+0\cdot1}\right]=\frac{1}{12}.$$

2) Il dominio della funzione è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases}2x-3>0, & (1)\\ x^2-3x+2\ge0, & (2)\\ x-\sqrt{x^2-3x+2}>0, & (3)\\ \log(2x-3)-\log\left(x-\sqrt{x^2-3x+2}\right)\ge0, & (4)\end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono $x > 3/2$.

Le soluzioni di (2) sono $x \geq 2$ oppure $x \leq 1$, perciò le soluzioni di (1)-(2) sono date dagli $x \geq 2$.

La disequazione si può scrivere $x > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, e siccome dovrà essere $x \geq 2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo $x^2 > x^2 - 3x + 2$ ovvero $x > 2/3$. Le soluzioni di (1)-(2)-(3) sono date allora da $x \geq 2$.

Per la monotonia del logaritmo naturale, la disequazione equivale a

$$2x - 3 > x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 3 - x.$$

Le soluzioni sono date dall'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ 3 - x < 0, \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq (3 - x)^2 \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni $x > 3$. La terza disequazione del secondo sistema equivale a $3x - 7 \geq 0$. Il secondo sistema ha allora soluzioni date da $7/3 \leq x \leq 3$. L'intera disequazione (4) ha allora come soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi, ovvero $7/3 \leq x$.

Il dominio della funzione è allora $\mathcal{D} = \{x : \ x \geq 7/3\}$.

3) Diciamo $\mathcal{P}(n)$ la proprietà in corrispondenza di n. Applichiamo il Principio d'Induzione. Verifichiamo che $\mathcal{P}(1)$ è vera, infatti

$$1 \cdot 2^1 = 2 = 2^{1+1}(1 - 1) + 2.$$

Utilizziamo ora l'ipotesi induttiva: supponendo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, verifichiamo che anche $\mathcal{P}(n + 1)$ lo è. Se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^1 &+ 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n) + (n + 1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n - 1) + 2 + (n + 1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(2n) + 2 = 2^{(n+1)+1}((n + 1) - 1) + 2 \end{aligned}$$

Quindi anche $\mathcal{P}(n + 1)$ è vera. Per il Principio d'Induzione, la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

4) Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 0 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2a^2 + 2.$$

Il limite sinistro:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -3a + a^2.$$

Affinché la funzione sia continua in 0 dovrà dunque essere $2a^2+2 = -3a+a^2$ ovvero $a^2+3a+2 = 0$ che ha come soluzioni $a_1 = -1$, $a_2 = -2$. Per tali valori di a la funzione risulta continua in $x = 0$.

Tema C

1a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3^x-5}{4^x+5x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x}{4^x}\,\frac{2x^2/3^x+1-5/3^x}{1+5x/4^x+1/4^x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\frac{2x^2/3^x+1-5/3^x}{1+5x/4^x+1/4^x}\right) = \left[0\cdot\frac{0+1-0}{1+0+0}\right] = 0.$$

1b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{(2+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\,\frac{x^2}{1-\cos x}\,\frac{2}{2+\cos x}\right) = 1\cdot2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

1c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log(x^2-5)+7}{2-3\log(x^3+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\log(x^2(1-5/x^2))+7}{2-3\log(x^3(1+1/x^3))} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4\log x+2\log(1-5/x^2)+7}{2-9\log x-3\log(1+1/x^3)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{2\log(1-5/x^2)+7}{\log x}}{-9+\frac{2-3\log(1+1/x^3)}{\log x}} = \left[\frac{4+0}{-9+0}\right] = -\frac{4}{9}.$$

1d)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x-x^2}{3x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1/x^2-2/x-1}{3+1/x^2} = \frac{0-0-1}{3+0} = -\frac{1}{3}.$$

1e)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4}{3x^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\,\frac{1/x^4-1}{3+1/x-1/x^2}\right) = \left[+\infty\cdot\frac{0-1}{3+0-0}\right] = -\infty.$$

1f)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos x^4+3}{2+3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left((2\cos x^4+3)\frac{1}{2+3x^3}\right) = [\{\text{funzione limitata}\}\cdot0] = 0.$$

1g)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}+\sin(2x^2)\tan\sqrt{x}}{2x^3-2(1-\cos\sqrt{x})\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{\sin(2x^2)}{x^2}\tan\sqrt{x}}{2x^{3/2}-2\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}} = \left[\frac{1+0\cdot2\cdot0}{0-2\cdot(1/2)}\right] = -1.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-2x+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+1)-(3x^2-2x+5)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2-2x+5}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2-4/x}{\sqrt{3+1/x^2}+\sqrt{3-2/x+5/x^2}} = \left[\frac{2-0}{2\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

1i)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-x)^2}{\sin x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

1j)

$$\lim_{x\to 1} \frac{2+\sin(\pi x)}{\log^2 x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty.$$

1k)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x+5)-\log(x+1)}{1+e^{-\log^2(2x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3+5/x}{1+1/x}\right)}{1+e^{-\log^2(2x)}} = \left[\frac{\log 3}{1+0}\right] = \log 3.$$

1l)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+1} - \sqrt{2x^3-3}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(|x|^{3/2}\left(\sqrt{3/x+1/x^2+1/x^3} - \sqrt{2-3/x^3}\right)\right) = \left[+\infty \cdot (\sqrt{0}-\sqrt{2})\right] = -\infty.$$

2) Il dominio della funzione è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x-6>0, & (1)\\ x^2-6x+5\geq 0, & (2)\\ x-\sqrt{x^2-6x+5}>0, & (3)\\ \log(2x-6)-\log\left(x-\sqrt{x^2-6x+5}\right)\geq 0, & (4)\end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono $x>3$.

Le soluzioni di (2) sono $x\geq 5$ oppure $x\leq 1$, perciò le soluzioni di (1)-(2) sono date dagli $x\geq 5$.

La disequazione si può scrivere $x>\sqrt{x^2-6x+5}$, e siccome dovrà essere $x\geq 5$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo $x^2>x^2-6x+5$ ovvero $x>5/6$. Le soluzioni di (1)-(2)-(3) sono date allora da $x\geq 5$.

Per la monotonia del logaritmo naturale, la disequazione equivale a

$$2x-6>x-\sqrt{x^2-6x+5} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \sqrt{x^2-6x+5}\geq 6-x.$$

Le soluzioni sono date dall'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2-6x+5\geq 0,\\ 6-x<0,\end{cases} \quad\cup\quad \begin{cases} x^2-6x+5\geq 0,\\ 6-x\geq 0,\\ x^2-6x+5\geq (6-x)^2\end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni $x>6$. La terza disequazione del secondo sistema equivale a $6x-31\geq 0$. Il secondo sistema ha allora soluzioni date da $31/6\leq x\leq 6$. L'intera disequazione (4) ha allora come soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi, ovvero $31/6\leq x$.

Il dominio della funzione è allora $\mathcal{D}=\{x:\ x\geq 31/6\}$.

3) Diciamo $\mathcal{P}(n)$ la proprietà in corrispondenza di n. Applichiamo il Principio d'Induzione. Verifichiamo che $\mathcal{P}(1)$ è vera, infatti

$$1\cdot 2^1 = 2 = 2^{1+1}(1-1)+2.$$

Utilizziamo ora l'ipotesi induttiva: supponendo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, verifichiamo che anche $\mathcal{P}(n+1)$ lo è. Se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$\begin{aligned}1 \cdot 2^1 + &2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n) + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(2n) + 2 = 2^{(n+1)+1}((n+1)-1) + 2\end{aligned}$$

Quindi anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Per il Principio d'Induzione, la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

4) Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 1 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 3a + 1 + a^2.$$

Il limite sinistro:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + 9.$$

Affinché la funzione sia continua in 1 dovrà dunque essere $3a+1+a^2 = a+9$ ovvero $a^2+2a-8 = 0$ che ha come soluzioni $a_1 = -4$, $a_2 = 2$. Per tali valori di a la funzione risulta continua in $x = 1$.

Tema D

1a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} &\left(\sqrt{x^3 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(|x|^{3/2} \left(\sqrt{1 + 2/x^2 + 1/x^3} - \sqrt{1/x + 1/x^3}\right)\right) = \left[+\infty \cdot (\sqrt{1} - \sqrt{0})\right] = +\infty.\end{aligned}$$

1b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 - 3}{2x^2 - 5x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{4x^2 - 3}{2 - 5x}\right) = \left[\frac{1}{0^+} \cdot \frac{0 - 3}{2 - 0}\right] = \left[+\infty \cdot (-\frac{3}{2})\right] = -\infty.$$

1c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x - 2x^3}{x^3 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5/x^3 - 1/x^2 - 2}{1 + 3/x + 1/x^3} = \frac{0 - 0 - 2}{1 + 0 + 0} = -2.$$

1d)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 3x^2 + 1}{2x^2 + 3 \cdot 2^x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 3x^2/2^x + 1/2^x}{2x^2/2^x + 3 + 5/2^x} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 3 + 0} = \frac{1}{3}.$$

1e)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} \tan \sqrt[3]{x^2} + 2x^2}{5(1 - \cos\sqrt{x}) + 3\sqrt{x}\sin(5x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\tan \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x}{5\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} + 15\sqrt{x}\frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1 + 0}{5 \cdot (1/2) + 0 \cdot 1} = \frac{2}{5}.$$

1f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+7x+3}-\sqrt{2x^2+5x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+7x+3)-(2x^2+5x+1)}{\sqrt{2x^2+7x+3}+\sqrt{2x^2+5x+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2/x}{\sqrt{2+7/x+3/x^2}+\sqrt{2+5/x+1/x^2}}=\frac{2+0}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1g)

$$\lim_{x\to0}\frac{x\tan(2x)}{\sin x^2(1+3\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan(2x)}{2x}\,\frac{x^2}{\sin x^2}\,\frac{2}{1+3\cos x}\right)=1\cdot1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2x+1)-\log(3x-5)}{1+e^{-\log^2(5x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{2+1/x}{3-5/x}\right)}{1+e^{-\log^2(5x)}}=\left[\frac{\log(2/3)}{1+0}\right]=\log(2/3).$$

1i)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2}{1+7x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+2/x^2}{1/x^3+7+1/x}\right)=0\cdot\frac{3+0}{0+7+0}=0.$$

1j) Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $-4<0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di 0 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x-4}{\tan x}=-\infty,\qquad\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x-4}{\tan x}=+\infty.$$

1k)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\sin x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left((3+\sin x^3)\frac{1}{x^2+1}\right)=[\{\text{funzione limitata}\}\cdot0]=0.$$

1l)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+2)-5}{3\log(x+3)+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2(1+2/x^2))-5}{3\log(x(1+3/x))+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x+\log(1+2/x^2)-5}{3\log x+3\log(1+3/x)+4}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{\log(1+2/x^2)-5}{\log x}}{3+\frac{3\log(1+3/x)+4}{\log x}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

2) Il dominio della funzione è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases}2x-4>0, & (1)\\ x^2-4x+3\geq0, & (2)\\ x-\sqrt{x^2-4x+3}>0, & (3)\\ \log(2x-4)-\log\left(x-\sqrt{x^2-4x+3}\right)\geq0, & (4)\end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono $x>2$.

Le soluzioni di (2) sono $x\geq3$ oppure $x\leq1$, perciò le soluzioni di (1)-(2) sono date dagli $x\geq3$.

La disequazione si può scrivere $x > \sqrt{x^2-4x+3}$, e siccome dovrà essere $x \geq 3$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo $x^2 > x^2-4x+3$ ovvero $x > 3/4$. Le soluzioni di (1)-(2)-(3) sono date allora da $x \geq 3$.

Per la monotonia del logaritmo naturale, la disequazione equivale a

$$2x-4 > x-\sqrt{x^2-4x+3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2-4x+3} \geq 4-x.$$

Le soluzioni sono date dall'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0, \\ 4-x < 0, \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0, \\ 4-x \geq 0, \\ x^2-4x+3 \geq (4-x)^2 \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni $x > 4$. La terza disequazione del secondo sistema equivale a $4x-13 \geq 0$. Il secondo sistema ha allora soluzioni date da $13/4 \leq x \leq 4$. L'intera disequazione (4) ha allora come soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi, ovvero $13/4 \leq x$.

Il dominio della funzione è allora $\mathcal{D} = \{x : \ x \geq 13/4\}$.

3) Diciamo $\mathcal{P}(n)$ la proprietà in corrispondenza di n. Applichiamo il Principio d'Induzione. Verifichiamo che $\mathcal{P}(1)$ è vera, infatti

$$1 \cdot 2^1 = 2 = 2^{1+1}(1-1)+2.$$

Utilizziamo ora l'ipotesi induttiva: supponendo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, verifichiamo che anche $\mathcal{P}(n+1)$ lo è. Se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^1 &+ 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n) + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(2n) + 2 = 2^{(n+1)+1}((n+1)-1) + 2 \end{aligned}$$

Quindi anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Per il Principio d'Induzione, la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

4) Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 1 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = a - a^2 + 3.$$

Il limite sinistro:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a^2.$$

Affinché la funzione sia continua in 1 dovrà dunque essere $a-a^2+3 = a^2$ ovvero $2a^2-a-3=0$ che ha come soluzioni $a_1 = -1$, $a_2 = 3/2$. Per tali valori di a la funzione risulta continua in $x = 1$.