Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 settembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3e^x - \cos x - 2}{\log(1+(x+1)^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos\sqrt{x} - x^3}{\operatorname{sen}(2x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x\arctan x + 5\sqrt{x^2-1}}{\log(2e^{3x}+1)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)}{x^4}$.

2. Data la funzione $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintototi;
b. la continuità, derivabilità e il segno della funzione;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
e. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$

a. calcolarne, ad esempio per parti, l'integrale indefinito;
b. calcolare, se esiste, l'integrale (improprio?) $\int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \log(x-y) + \log(x+y)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y'' - 6y' - 7y = 14t^2 - 4t + 7$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$.

Punti: 2+2+2+2, 2+2+2+2+2, 4+2, 6, 1+2+2.

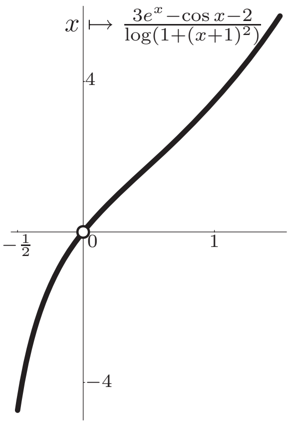
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

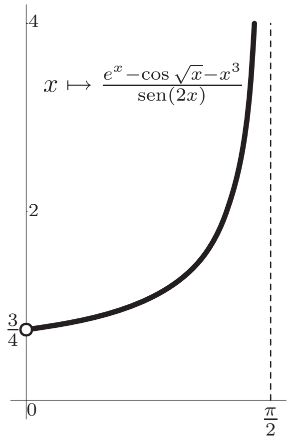
Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 settembre 2002

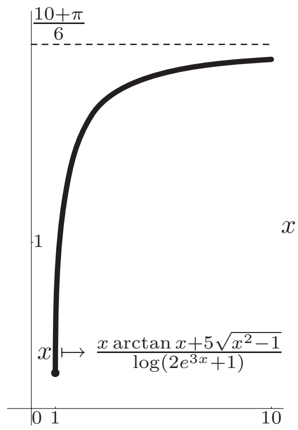
Svolgimento



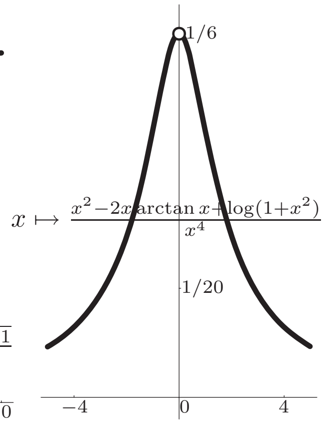
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x - \cos x - 2}{\log(1+(x+1)^2)} = \frac{3-1-2}{\log 2} = 0\,.$$

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos\sqrt{x} - x^3}{\operatorname{sen}(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 3x^2}{2\cos(2x)} = \frac{1+1/2-0}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x + 5\sqrt{x^2-1}}{\log(2e^{3x}+1)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + 5\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\frac{6e^{3x}}{2e^{3x}+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + 5\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}}{\frac{6}{2+e^{-3x}}} = \frac{\pi/2+0+5}{6/2} = \frac{\pi+10}{6}.$$

d. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)}{x^4} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\arctan x - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{2x^3} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{6(1+x^2)} = \frac{1}{6}.$$

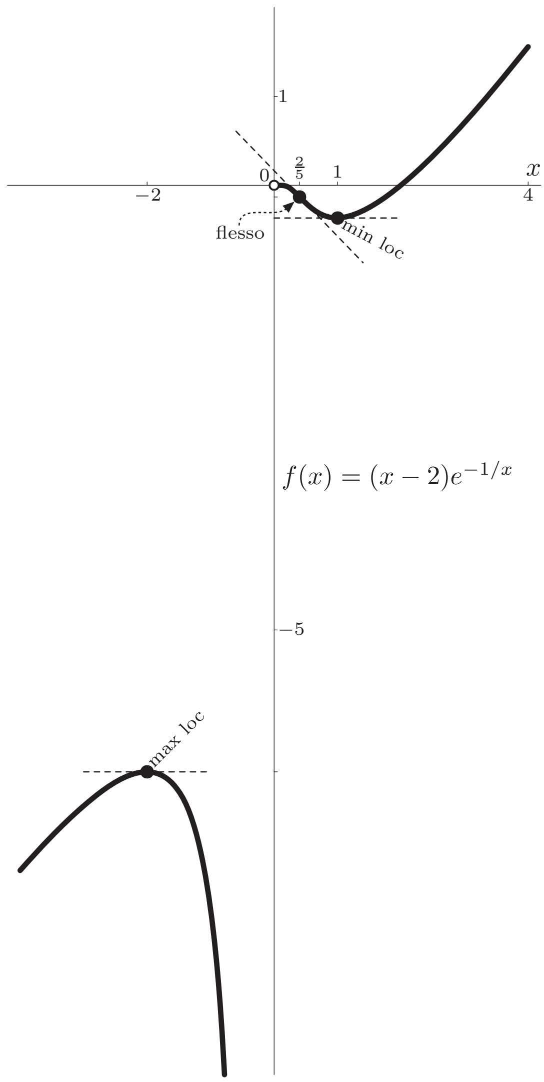
2.a+b. Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \big[(-2)\cdot +\infty\big] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \big[(-2)\cdot 0\big] = 0,$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \big[\pm\infty \cdot 1\big] = \pm\infty.$$

Quindi la funzione non ammette massimo né minimo assoluto. In $x = 0$ la funzione ha un asintoto verticale. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)}{x} e^{-1/x} = 1,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 1x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(-\frac{e^{-1/x}-1}{-1/x} - 2e^{-1/x}\Big) =$$
$$= -1 - 2 = -3,$$

perciò la retta di equazione $y = x - 3$ è un asintoto a $\pm\infty$.
La $f(x)$ è banalmente positiva se $x \in\,]2, +\infty[$, negativa se $x \in\,]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 2[$ e si annulla in $x = 2$.



c. La derivata prima è

$$f'(x) = \Big(1 + (x-2)\frac{1}{x^2}\Big)e^{-1/x} =$$
$$= \Big(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\Big)e^{-1/x} =$$
$$= \frac{x^2 + x - 2}{x^2} e^{-1/x}.$$

Ristretti al dominio, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + x - 2 \geq 0$ ovvero se $x \geq 1$ oppure $x \leq -2$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty, -2[$ e su $]1, +\infty[$, decrescente su $]-2, 0[$ e su $]0, 1[$. In $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. Si osservi che si ha anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0\,.$$

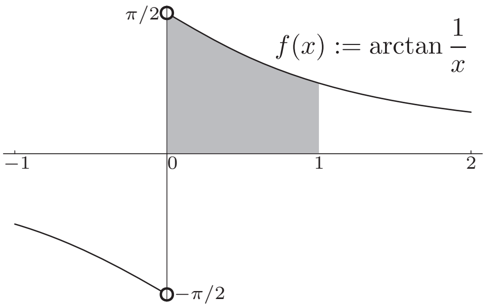
d. La derivata seconda è

$$f''(x) = \Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{x^2+x-2}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\Big)e^{-1/x} = \frac{5x-2}{x^4}e^{-1/x}\,.$$

Si ha che $f''(x) \geq 0$ se e solo se $5x - 2 \geq 0$ ovvero se $x \geq 2/5$. La funzione è dunque convessa su $]2/5, +\infty[$ e concava su $]-\infty, 0[$ e su $]0, 2/5[$. In $x_3 = 2/5$ ha un punto di flesso.

3. Usando il metodo per parti

$$\int \Big(1\cdot \arctan\frac{1}{x}\Big)\,dx = x\arctan\frac{1}{x} - \int x \frac{1}{(1/x)^2+1}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\,dx =$$
$$= x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c\,.$$



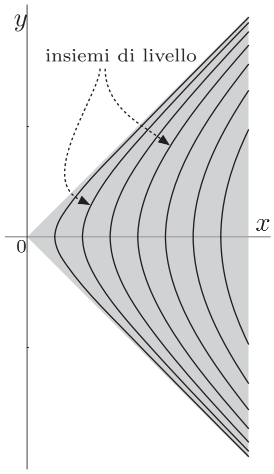
Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale si osserva che $\arctan(1/x) \to \pi/2$ per $x \to 0^+$, quindi la funzione è limitata e l'integrale è ben definito. Detta F la primitiva di f che abbiamo trovato, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ha che

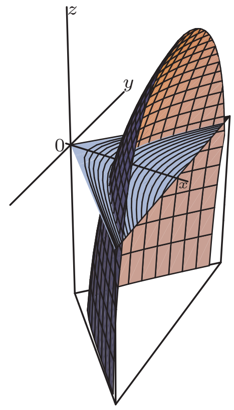
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \Big[F(x)\Big]_\delta^1 = \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} - \delta \arctan\frac{1}{\delta}\right) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}.\end{aligned}$$

4. a. Il dominio è

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \ge y, \; x \ge -y\big\}\,,$$

che geometricamente rappresenta il quarto di piano compreso tra le bisettrici del quarto e del primo quadrante, in grigio nella figura accanto. Si osservi che su $\mathcal{D}$ vale $f(x,y) = \log(x^2 - y^2)$.





b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$, ovvero $\log(x^2 - y^2) = k$ che equivale a $x^2 - y^2 = e^k$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale equazione rappresenta un'iperbole equilatera di asintoti le bisettrici dei quadranti. L'insieme di livello k è dunque quel ramo dell'iperbole che sta in $\mathcal{D}$.

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}\,.$$

b. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$. Si ha $\bar{y}'(t) = 2at + b$, e $\bar{y}''(t) = 2a$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente

$$2a - 6(2at + b) - 7(at^2 + bt + c) = 14t^2 - 4t + 7\,,$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -7a = 14, \\ -12a - 7b = -4, \\ 2a - 6b - 7c = 7, \end{cases}$$

che ha come soluzione $a = -2$, $b = 4$, $c = -5$, perciò la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t} - 2t^2 + 4t - 5\,.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 7C_2 e^{7t} - 4t + 4\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 5 = 0, \\ -C_1 + 7C_2 + 4 = 7, \end{cases}$$

quindi $C_1 = 4$, $C_2 = 1$ e la soluzione cercata è

$$y(t) = 4e^{-t} + e^{7t} - 2t^2 + 4t - 5\,.$$