Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 5 settembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)+1}{\log^2(x+1)+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\tan(x^2)-2}{\operatorname{sen}^2(x+5x^2)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\operatorname{arcsen} x)+3x}{e^{5x}-7x^3-2x^2-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^2+2)-\arctan(x^2+1)}{\log\left(1+\frac{1}{(x+1)^4}\right)}$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2} + \arctan x - \log(x^2+1)$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità e derivabilità;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. il segno e gli zeri di f, usando i punti precedenti;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio colla sostituzione $t = \operatorname{sen} x$, il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 6}\, dx\,.$$

4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{n!+1}\,.$$

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y'' + 2y' + 5y = 5t^2 - t + 10$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 6, 6, 1+2+2.

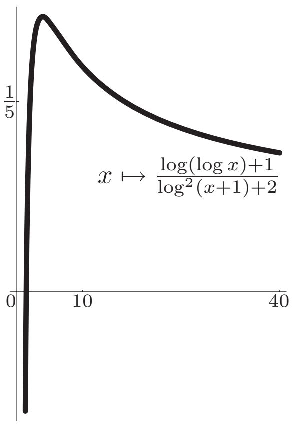
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

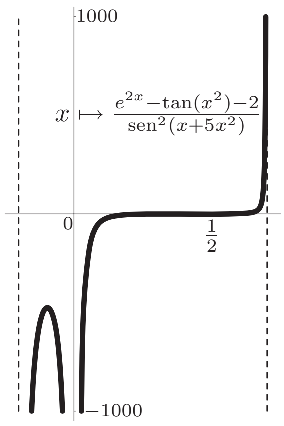
Analisi Matematica

Prova Scritta del 5 settembre 2002

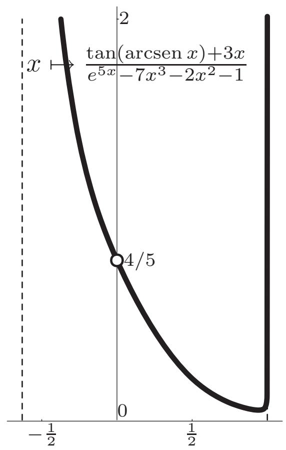
Svolgimento



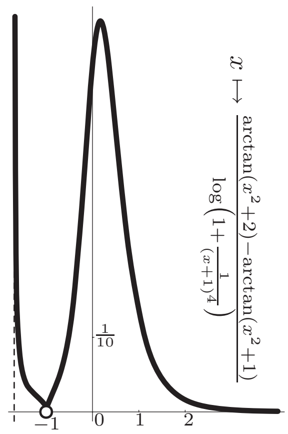
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)+1}{\log^2(x+1)+2} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{2\log(x+1)}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{2\log x \log(x+1)} \right) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\tan(x^2)-2}{\mathrm{sen}^2(x+5x^2)} = \left[\frac{1-0-2}{0^+}\right] = -\infty\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $0/0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\mathrm{arcsen}\, x)+3x}{e^{5x}-7x^3-2x^2-1} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(\mathrm{arcsen}\, x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 3}{5e^{5x}-21x^2-4x} = \frac{1+3}{5-0} = \frac{4}{5}\,.$$

d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $0/0$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^2+2)-\arctan(x^2+1)}{\log\left(1+\frac{1}{(x+1)^4}\right)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{1+(x^2+2)^2} - \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^4}} \cdot \frac{-4}{(x+1)^5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{-4} \cdot \frac{\frac{(1+(x^2+1)^2)-(1+(x^2+2)^2)}{\left((x^2+2)^2+1\right)\left((x^2+1)^2+1\right)}}{\frac{1}{(x+1)^5+(x+1)}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2x^2+3)\left((x+1)^5+(x+1)\right)}{2\left((x^2+2)^2+1\right)\left((x^2+1)^2+1\right)} =$$

$$= \left[\frac{\sim 2x^8}{\sim 2x^8}\right] = 1.$$

2.a+b. Il dominio è $\mathbb{R}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

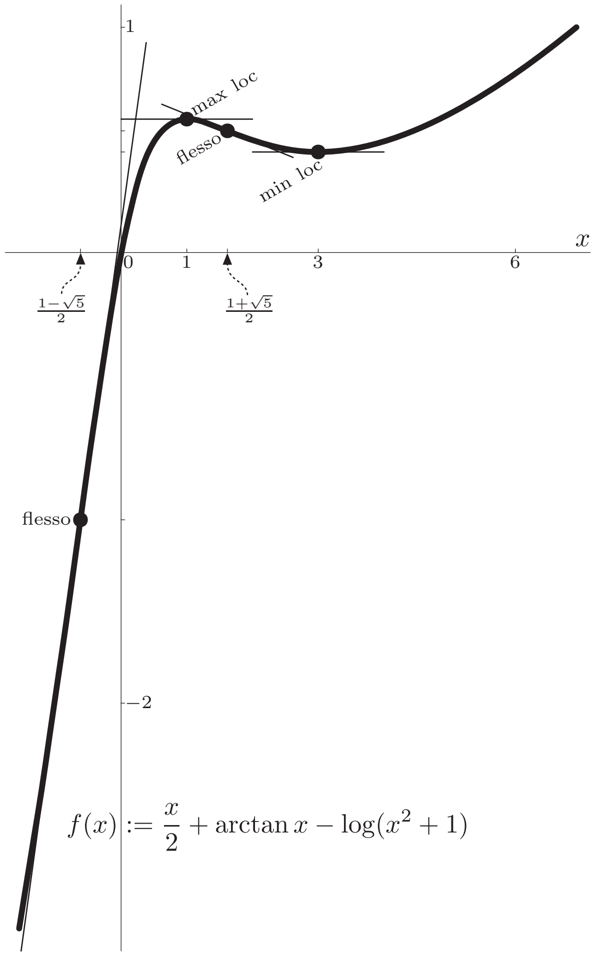
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette massimo/minimo assoluto. Siccome

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{x} - \frac{\log(x^2+1)}{x}\right) = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\big(\arctan x - \log(x^2+1)\big) = \pm\frac{\pi}{2} - \infty = -\infty,$$

f non ammette asintoti obliqui a $\pm\infty$.



c. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2-4x+3}{2(1+x^2)}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-4x+3 \geq 0$ ovvero se $x \geq 3$ o $x \leq 1$. La funzione è dunque decrescente su $]1,3[$ e crescente su $]-\infty,1[$ e su $]3,+\infty[$. In $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

d. Si osserva facilmente che $f(0) = 0$. Poiché il valore di f nell'unico punto di minimo relativo è $f(3) = 3/2 + \arctan 3 - \log 10 > 0$, dalla studio della crescenza si deduce che la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.

e. La derivata seconda è

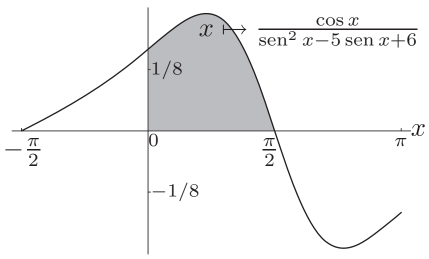
$$f''(x) = \frac{(2x-4)(1+x^2) - (x^2-4x+3)2x}{2(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-x-1)}{(1+x^2)^2}\,.$$

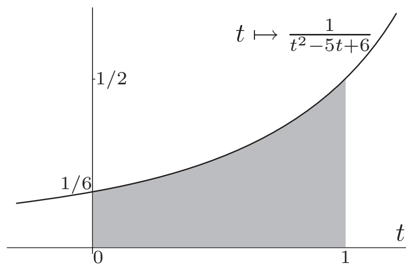
Si ha che $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x - 1 \geq 0$ ovvero se $x \geq (1+\sqrt{5})/2$ o $x \leq (1-\sqrt{5})/2$. La funzione è dunque concava su $](1-\sqrt{5})/2,(1+\sqrt{5})/2[$, convessa su $]-\infty,(1-\sqrt{5})/2[$ e su $](1+\sqrt{5})/2,+\infty[$. In $x_2 = (1-\sqrt{5})/2$ e $x_3 = (1+\sqrt{5})/2$ ha due punti di flesso.

3. Si ha

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 6}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 6}\,d\operatorname{sen} x = \int_0^1 \frac{1}{t^2-5t+6}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt = \Big[\log|t-3| - \log|t-2|\Big]_0^1 = \log\frac{4}{3}.$$





4. È una serie a termini positivi; applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{(n+1)!+1}}{\frac{2^n+3^n}{n!+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2(2/3)^n+3}{(2/3)^n+1}\;\frac{1+1/n!}{(n+1)+1/n!}\Big)=$$
$$=3\cdot 0=0\,,$$

quindi la serie converge. Alternativamente si poteva osservare che il termine generale della serie è facilmente maggiorato da $2\cdot 3^n/n!$, che è il termine generale di una serie convergente (basta usare il criterio del rapporto, o anche osservare che tale serie converge banalmente a $2(e^3-1)$). Per il criterio del confronto si riottiene la convergenza della serie data.

n	$\frac{2^n+3^n}{n!+1}$	$\sum_1^n \frac{2^k+3^k}{k!+1}$
1	2,5	2,5
2	4,33333	6,83333
3	5	11,8333
4	3,88	15,7133
5	2,27273	17,9861
6	1,09986	19,0859
7	0,459234	19,5452
8	0,169068	19,7142
9	0,0556519	19,7699
10	0,0165545	19,7864

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+2\lambda+5=0$ che ha come soluzioni $\lambda_1=-1-2i$, $\lambda_2=-1+2i$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t)=e^{-t}\big(C_1\operatorname{sen}2t+C_2\cos 2t\big)\,.$$

b. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t)=at^2+bt+c$. Si ha $\bar{y}'(t)=2at+b$, e $\bar{y}''(t)=2a$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente

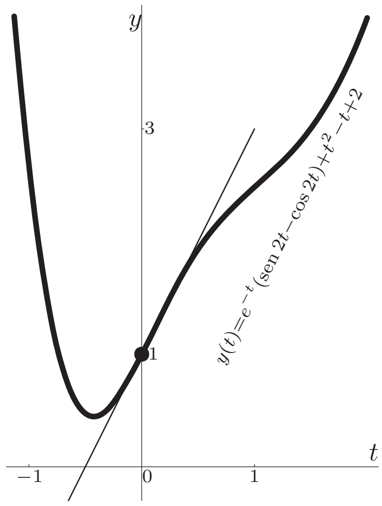
$$2a+2(2at+b)+5(at^2+bt+c)=5t^2-t+10\,,$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases}5a=5,\\ 4a+5b=-1,\\ 2a+2b+5c=10,\end{cases}$$

che ha come soluzione $a=1$, $b=-1$, $c=2$, perciò la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t)=e^{-t}\big(C_1\operatorname{sen}2t+C_2\cos 2t\big)+t^2-t+2\,.$$



c. Derivando si ottiene

$$y'(t)=e^{-t}\big((-C_1-2C_2)\operatorname{sen}2t+(2C_1-C_2)\cos 2t\big)+2t-1\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0)=1$ e $y'(0)=2$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases}C_2+2=1,\\ 2C_1-C_2-1=2,\end{cases}$$

quindi $C_1=1$, $C_2=-1$ e la soluzione cercata è

$$y(t)=e^{-t}\big(\operatorname{sen}2t-\cos 2t\big)+t^2-t+2\,.$$