Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 luglio 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+5x)-3x}{2x-3\operatorname{sen} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-\log^2(1+x)}{3x^2-\operatorname{sen}(x^2)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x^2+e^{2-1/x}-1}{\log(2+x^2)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{\log(1+e^{3x})+x}$.

2. Data la funzione $f(x) = e^x - \log(e^x - 1) - 2$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintototi;
b. la continuità e derivabilità;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. il segno e gli zeri di f, usando i punti precedenti;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio colla sostituzione $t = e^x$, l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}\,dx\,.$$

4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}.$$

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y'' - 4y = 3e^{2t}$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Compito A

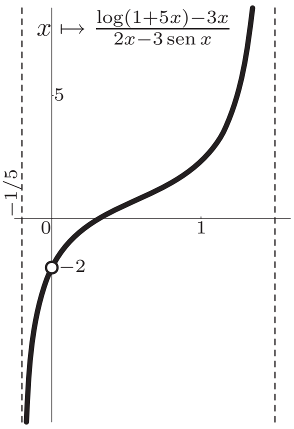
Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 6, 6, 1+2+2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

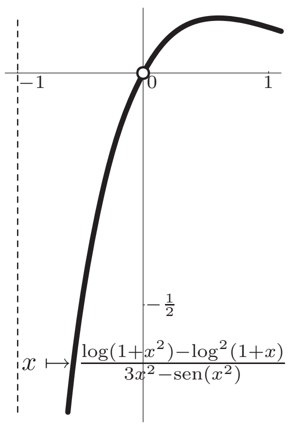
Analisi Matematica, compito A

Prova Scritta del 15 luglio 2002

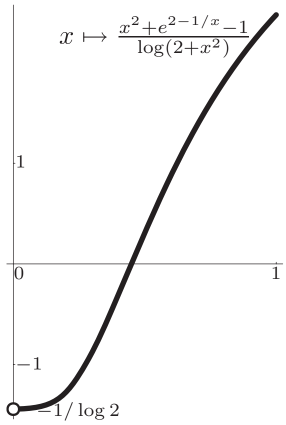
Svolgimento



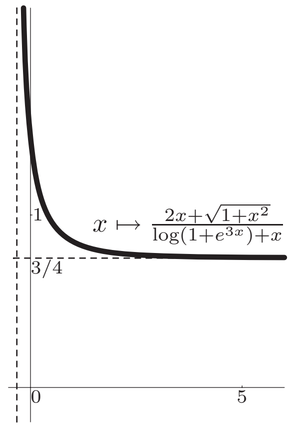
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+5x)-3x}{2x-3\operatorname{sen} x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{1+5x}-3}{2-3\cos x} = -2\,.$$

b. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-\log^2(1+x)}{3x^2-\operatorname{sen}(x^2)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2\log(1+x)}{1+x}}{6x-2x\cos(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} \cdot \frac{x+x^2-(1+x^2)\log(1+x)}{3x-x\cos(x^2)} \Big) = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-(1+x^2)\log(1+x)}{3x-x\cos(x^2)} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-2x\log(1+x)-\frac{1+x^2}{1+x}}{3-\cos(x^2)+2x^2\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Alternativamente, dividendo per x^2, si ottiene

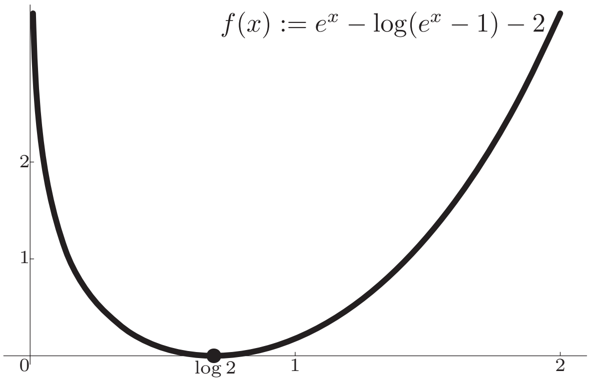
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-\log^2(1+x)}{3x^2-\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1+x^2)}{x^2} - \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^2}{3-\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}} = \frac{1-1^2}{3-1} = 0\,.$$

c. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2+e^{2-1/x}-1}{\log(2+x^2)} = \Big[\frac{0+0-1}{\log 2}\Big] = -\frac{1}{\log 2}\,.$$

d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{\log(1+e^{3x})+x} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{\sqrt{1/x^2+1}}}{\frac{3}{e^{-3x}+1}+1} = \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}\,.$$



2.a+b. Il dominio è dato dagli x che soddisfano $e^x - 1 > 0$ ovvero $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(e^x - x - \log(1 - e^{-x}) - 2\big) = +\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette massimo assoluto. In $x = 0$ la funzione ha un asintoto verticale mentre, osservando che anche $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$, non ammette asintoto obliquo.

c. La derivata prima è

$$f'(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x - 1} = e^x \frac{e^x - 2}{e^x - 1}\,.$$

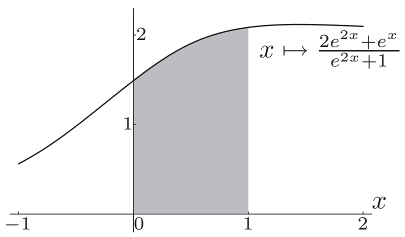
Ristretti al dominio, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $e^x - 2 \geq 0$ ovvero se $x \geq \log 2$. La funzione è dunque decrescente su $]0, \log 2[$ e crescente su $]\log 2, +\infty[$. In $x_0 = \log 2$ ammette un minimo relativo (e assoluto).

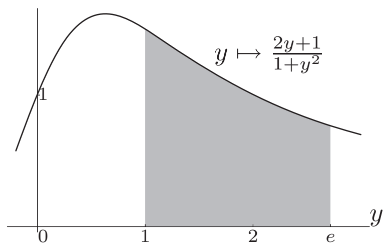
d. Essendo $f(\log 2) = 0$, dalla studio della crescenza si deduce che la funzione è sempre positiva tranne che in $\log 2$ dove si annulla.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(2e^{2x} - 2e^x)(e^x - 1) - (e^{2x} - 2e^x)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^{2x} - 2e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 + (e^x - 1)^2)}{(e^x - 1)^2}\,,$$

che è sempre positiva, quindi f è convessa su $\mathcal{D}$.





3. Si ha

$$\int_0^1 \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int_0^1 \frac{2e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,de^x = \int_1^e \frac{2t + 1}{t^2 + 1}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1}\,d(t^2 + 1) + \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1}\,dt =$$
$$= \Big[\log(1 + t^2) + \arctan t\Big]_1^e = \log(1 + e^2) - \log 2 + \arctan e - \frac{\pi}{4} \approx 1{,}86667.$$

4. È una serie a termini positivi; applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right)^{-1/2} = e^{-1/2} < 1\,,$$

quindi la serie converge.

n	$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$	$\sum_1^n \left(1-\frac{1}{2k}\right)^{k^2}$
1	0.5	0.5
2	0.316406	0.816406
3	0.193807	1.01021
4	0.118067	1.12828
5	0.0717898	1.20007
6	0.0436126	1.24368
7	0.026482	1.27016
8	0.0160754	1.28624
9	0.0097564	1.296
10	0.00592053	1.30192

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}\,.$$

b. Il secondo membro è del tipo $f(t) = Ae^{Kt}$, dove K coincide con una delle due radici dell'equazione caratteristica. Per la teoria, cerchiamo allora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ate^{2t}$. Si ha $\bar{y}'(t) = ae^{2t} + 2ate^{2t}$, e $\bar{y}''(t) = 4ae^{2t} + 4ate^{2t}$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente

$$4ae^{2t} + 4ate^{2t} - 4(ate^{2t}) = 3e^{2t}\,,$$

da cui si ricava l'equazione $4a = 3$ ovvero $a = 3/4$. La soluzione generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{4} te^{2t}\,.$$

c. Derivando si ottiene

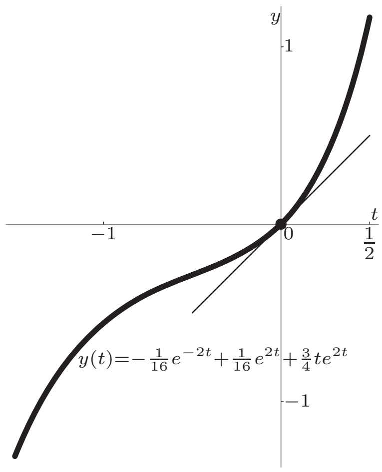
$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{3}{4} e^{2t} + \frac{3}{2} te^{2t}\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2C_1 + 2C_2 + 3/4 = 1, \end{cases}$$

quindi $C_1 = -C_2 = -1/16$ e la soluzione cercata è

$$y(t) = -\frac{1}{16} e^{-2t} + \frac{1}{16} e^{2t} + \frac{3}{4} te^{2t}\,.$$



Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 15 luglio 2002

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{1+4x^2}}{\log(2+e^{2x})-4x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{2x^2+e^{1-3/x}-1}{\sqrt{2+x^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log^2(1+x)+\log(1-x^2)}{x^2-3\,\mathrm{sen}(x^2)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+4x)-5x}{x-\mathrm{sen}(3x)}$.

2. Data la funzione $f(x)=2e^x-\log(2e^x-1)-2$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintototi;
b. la continuità e derivabilità;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. il segno e gli zeri di f, usando i punti precedenti;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio colla sostituzione $t=e^x$, l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{e^x-2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx\,.$$

4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2}.$$

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y''-y'-2y=9e^{-t}$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$ e $y'(0)=1$.

Compito B

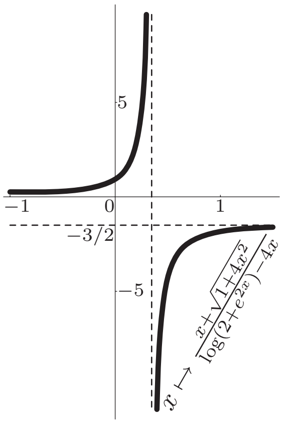
Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 6, 6, 1+2+2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

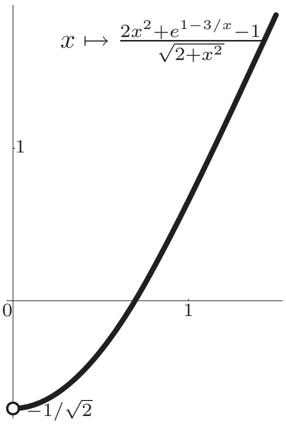
Analisi Matematica, compito B

Prova Scritta del 15 luglio 2002

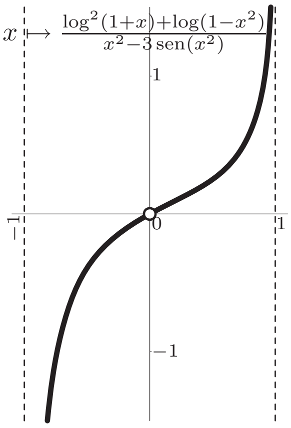
Svolgimento



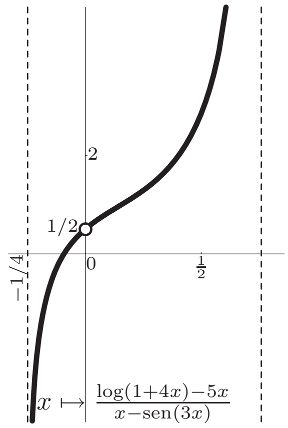
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Il denominatore si può scrivere come $\log(2+e^{2x}) - 4x = 2x + \log(2e^{-2x}+1) - 4x = \log(2e^{-2x}+1) - 2x$ e perciò tende a $-\infty$ se $x \to +\infty$. Si può dunque applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{1+4x^2}}{\log(2+e^{2x})-4x} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}}{\frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{4}{\sqrt{1/x^2+4}}}{\frac{2}{2e^{-2x}+1}-4} = \frac{1+2}{2-4} = -\frac{3}{2}\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to0+} \frac{2x^2+e^{1-3/x}-1}{\sqrt{2+x^2}} = \left[\frac{0+0-1}{\sqrt{2}}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0} \frac{\log^2(1+x)+\log(1-x^2)}{x^2-3\,\mathrm{sen}\,x^2} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{2\log(1+x)}{1+x}+\frac{-2x}{1-x^2}}{2x-6x\cos(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{(1+x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^2)\log(1+x)-x-x^2}{x-3x\cos(x^2)}\right) = \lim_{x\to0} \frac{(1-x^2)\log(1+x)-x-x^2}{x-3x\cos(x^2)} =$$

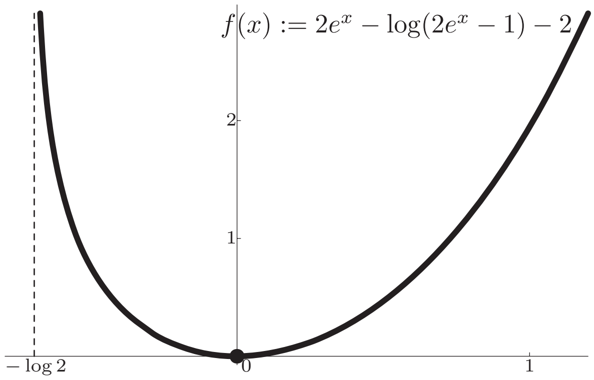
$$\overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0} \frac{-2x\log(1+x)+\frac{1-x^2}{1+x}-1-2x}{1-3\cos(x^2)+6x^2\,\mathrm{sen}(x^2)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Alternativamente, dividendo per x^2, si ottiene

$$\lim_{x\to0} \frac{\log^2(1+x)+\log(1-x^2)}{x^2-3\,\mathrm{sen}\,x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^2-\frac{\log(1-x^2)}{-x^2}}{1-3\frac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2}} = \frac{1^2-1}{1-3} = 0\,.$$

d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+4x)-5x}{x-\mathrm{sen}(3x)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{4}{1+4x}-5}{1-3\cos(3x)} = \frac{4-5}{1-3} = \frac{1}{2}\,.$$



2.a+b. Il dominio è dato dagli x che soddisfano $2e^x - 1 > 0$ ovvero $\mathcal{D} =]\log(1/2), +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to\log(1/2)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(2e^x - x - \log(2 - e^{-x}) - 2\big) = +\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette massimo assoluto. In $x = \log(1/2) = -\log 2$ la funzione ha un asintoto verticale mentre, osservando che anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, non ammette asintoto obliquo.

c. La derivata prima è

$$f'(x) = 2e^x - \frac{2e^x}{2e^x - 1} = \frac{4e^{2x} - 4e^x}{2e^x - 1} = 4e^x \frac{e^x - 1}{2e^x - 1}\,.$$

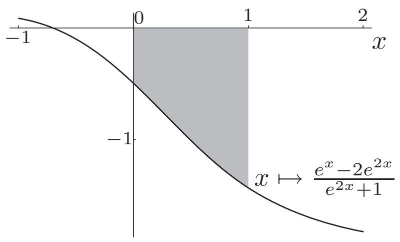
Ristretti al dominio, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $e^x - 1 \geq 0$ ovvero se $x \geq 0$. La funzione è dunque decrescente su $]\log(1/2), 0[$ e crescente su $]0, +\infty[$. In $x_0 = 0$ ammette un minimo relativo (e assoluto).

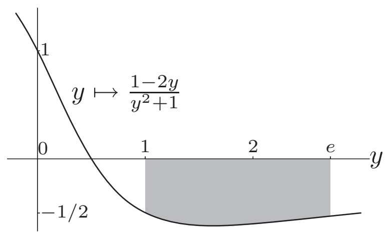
d. Essendo $f(0) = 0$, dalla studio della crescenza si deduce che la funzione è sempre positiva tranne che in 0 dove si annulla.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{(2e^{2x} - e^x)(2e^x - 1) - (e^{2x} - e^x)2e^x}{(2e^x - 1)^2} = 4\frac{e^x(2e^{2x} - 2e^x + 1)}{(2e^x - 1)^2}\,,$$

che è sempre positiva quindi f è convessa su $\mathcal{D}$.





3. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx &= \int_0^1 \frac{1 - 2e^x}{e^{2x} + 1}\,de^x = \int_1^e \frac{1 - 2t}{t^2 + 1}\,dt = \\ &= \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1}\,dt - \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1}\,d(t^2 + 1) = \Big[\arctan t - \log(1 + t^2)\Big]_1^e = \\ &= \arctan e - \frac{\pi}{4} + \log 2 - \log(1 + e^2) \approx 1{,}0009.\end{aligned}$$

4. È una serie a termini positivi; applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right)^{-1/3} = e^{-1/3} < 1\,,$$

quindi la serie converge.

n	$\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2}$	$\sum_1^n \left(1-\frac{1}{3k}\right)^{k^2}$
1	0.666667	0.666667
2	0.482253	1.14892
3	0.346439	1.49536
4	0.248532	1.74389
5	0.178205	1.9221
6	0.127747	2.04984
7	0.0915639	2.14141
8	0.0656239	2.20703
9	0.0470301	2.25406
10	0.0337034	2.28776

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\,.$$

b. Il secondo membro è del tipo $f(t) = Ae^{Kt}$ dove K coincide con una delle due radici dell'equazione caratteristica. Per la teoria, cerchiamo allora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ate^{-t}$. Si ha $\bar{y}'(t) = ae^{-t} - ate^{-t}$, e $\bar{y}''(t) = -2ae^{-t} + ate^{-t}$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente

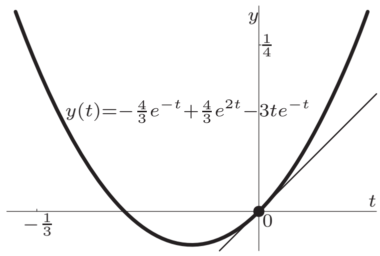
$$-2ae^{-t} + ate^{-t} - (ae^{-t} - ate^{-t}) - 2(ate^{-t}) = 9e^{-t}\,,$$

da cui si ricava l'equazione $-3a = 9$ ovvero $a = -3$. La soluzione generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 3te^{-t}\,.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 3e^{-t} + 3te^{-t}\,.$$



Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 2C_2 - 3 = 1, \end{cases}$$

quindi $C_1 = -C_2 = -4/3$ e la soluzione cercata è

$$y(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} - 3te^{-t}\,.$$