Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 28 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - 3x^2}{\tan(4x) - 2x}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(\log x) - x^2}{\sqrt{4+3x} - 3x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(e^{x^2} + 2x^2)}{x \operatorname{sen} x + \cos x - e^{3x} + 3x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - x \operatorname{sen} x}}{\log \sqrt[3]{1+x^2}}$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^3}}$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità, derivabilità e il segno della funzione;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
e. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $f(x) = e^{-3x}(x^2 + 2e^x)$

a. calcolare l'integrale definito $\int_0^1 f(x)\,dx$;
b. calcolare, se esiste, l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{y+x}$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y'' - 2y' + 3y = 9t^2 + 1$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Compito A

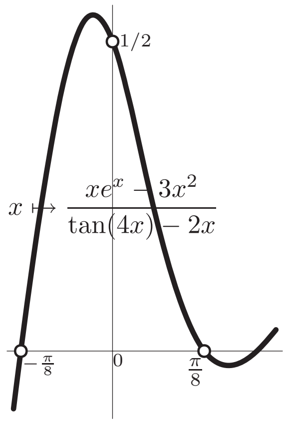
Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2, 4+2, 6, 2+4+3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

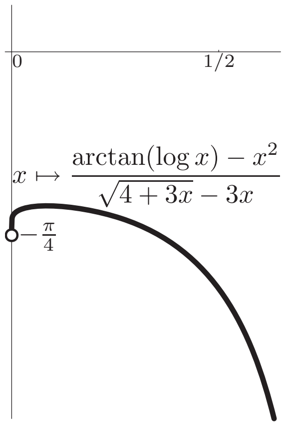
Analisi Matematica, compito A

Prova Scritta del 28 giugno 2002

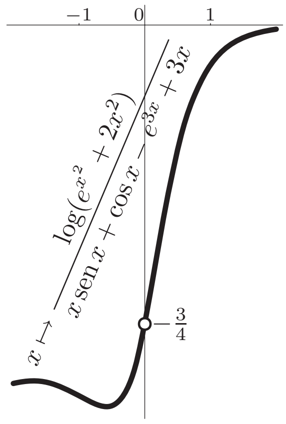
Svolgimento



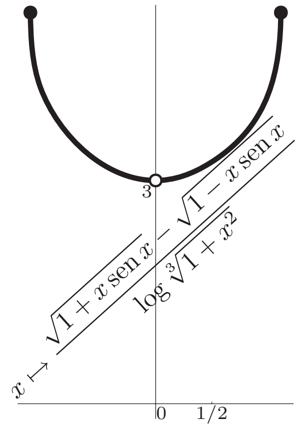
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - 3x^2}{\tan(4x) - 2x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{xe^x + e^x - 6x}{\frac{4}{\cos^2(4x)} - 2} = \frac{0 + 1 - 0}{4 - 2} = \frac{1}{2}\,.$$

Alternativamente, dividendo numeratore e denominatore per x, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - 3x^2}{\tan(4x) - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 3x}{4\frac{\tan(4x)}{4x} - 2} = \frac{1 - 0}{4\cdot 1 - 2} = \frac{1}{2}\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\log x) - x^2}{\sqrt{4+3x} - 3x} = \frac{-\pi/2 - 0}{\sqrt{4} - 0} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{x^2} + 2x^2)}{x \operatorname{sen} x + \cos x - e^{3x} + 3x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2xe^{x^2} + 4x}{e^{x^2} + 2x^2}}{\operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x - 3e^{3x} + 3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + 4x}{x\cos x - 3e^{3x} + 3} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 4}{\cos x - x\operatorname{sen} x - 9e^{3x}} = \frac{2 + 0 + 4}{1 - 0 - 9} = -\frac{3}{4}.$$

d. Dopo una prima trasformazione e l'isolamento di un fattore non indeterminato, si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - x\operatorname{sen} x}}{\log \sqrt[3]{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}\log(1+x^2)} \cdot \frac{(1 + x\operatorname{sen} x) - (1 - x\operatorname{sen} x)}{\sqrt{1 + x\operatorname{sen} x} + \sqrt{1 - x\operatorname{sen} x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{3\cdot 2}{\sqrt{1 + x\operatorname{sen} x} + \sqrt{1 - x\operatorname{sen} x}}}_{\to 2} \cdot \frac{x\operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)} \right) = 3 \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

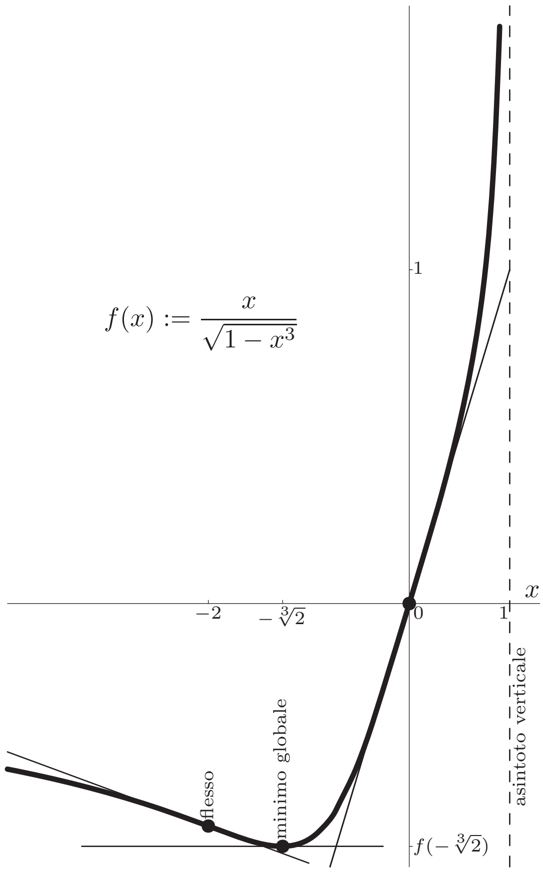
$$= 3\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\frac{2x}{1+x^2}} = 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x} \right) = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \right) = \frac{3}{2}\cdot(1+1) = 3.$$

2.a+b. Il dominio è dato dagli x che soddisfano $1-x^3>0$ ovvero $\mathcal{D}=\,]-\infty,1[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^3}}=0\,,$$

dove si è usato che $x=-|x|=-\sqrt{x^2}$ se $x<0$. Quindi la funzione non ammette massimo assoluto. La retta $x=1$ è un asintoto verticale, mentre l'asse x è un asintoto orizzontale a $-\infty$. Ristretta al dominio la funzione è banalmente positiva se $0<x<1$, negativa se $x<0$, e si annulla in $x=0$.



c. La derivata prima è

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^3}-x\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}}{1-x^3}=\frac{x^3+2}{2(1-x^3)^{3/2}}\,.$$

Ristretti al dominio, si ha che $f'(x)\ge0$ se e solo se $x^3+2\ge0$ ovvero se $x\ge-\sqrt[3]{2}$. La funzione è dunque crescente su $]-\sqrt[3]{2},1[$ e decrescente su $]-\infty,-\sqrt[3]{2}[$. In $x_0=-\sqrt[3]{2}$ c'è un minimo locale (e globale).

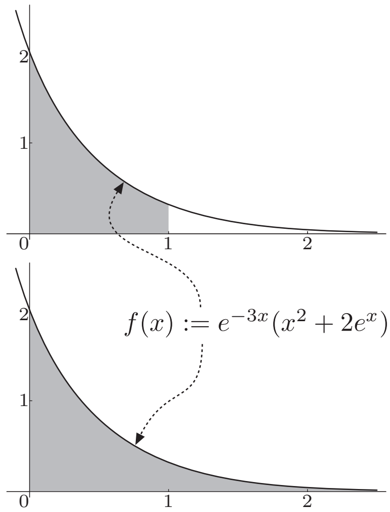
d. La derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{3x^2(1-x^3)^{3/2}-(x^3+2)\frac{3}{2}(1-x^3)^{1/2}(-3x^2)}{2(1-x^3)^3}=\frac{3x^2(x^3+8)}{4(1-x^3)^{5/2}}\,.$$

Si ha che $f''(x)\ge0$ se e solo se $x^3+8\ge0$ ovvero se $x\ge-2$. La funzione è dunque convessa su $]-2,1[$ e concava su $]-\infty,-2[$. In $x_1=-2$ ha un punto di flesso. Anche nell'origine la derivata seconda si annulla, ma non si tratta di un flesso, perché la derivata seconda non cambia di segno in quel punto.

3. Dopo alcuni semplici passaggi si utilizza il metodo per parti due volte

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}(x^2+2e^x)\,dx &= \int x^2e^{-3x}\,dx+2\int e^{-2x}\,dx=\\ &=-e^{-2x}+\int x^2e^{-3x}\,dx=\\ &=-e^{-2x}+\left(-\frac{x^2}{3}e^{-3x}+\frac{2}{3}\int xe^{-3x}\,dx\right)=\\ &=-e^{-2x}-\frac{x^2}{3}e^{-3x}+\frac{2}{3}\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx\right)=\\ &=-e^{-2x}-\frac{x^2}{3}e^{-3x}-\frac{2}{9}xe^{-3x}-\frac{2}{27}e^{-3x}+c=:F(x)+c\end{aligned}$$



Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ha, per $M>0$

$$\int_0^M f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_0^M=\frac{29}{27}-e^{-2M}-\Big(\frac{M^2}{3}+\frac{2M}{9}+\frac{2}{27}\Big)e^{-3M}\,,$$

per cui

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{29}{27}-e^{-2}-\frac{17}{27}e^{-3},\qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(x)\,dx=\frac{29}{27}\,.$$

4. a. Il dominio è

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge x, \ y \ge -x\right\},$$

che geometricamente rappresenta il quarto di piano compreso tra le bisettrici del primo e secondo quadrante.

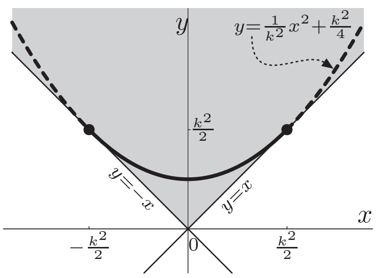
b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$, ovvero $\sqrt{y-x} + \sqrt{y+x} = k$. È chiaro che tale insieme risulta vuoto per $k < 0$. Per $k > 0$ si può elevare al quadrato, per cui l'insieme di livello (quando (x,y) è ristretto al dominio della funzione) è dato da

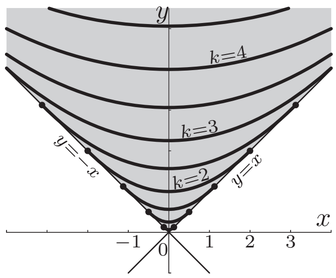
$$(y-x) + 2\sqrt{y^2 - x^2} + (y+x) = k^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\sqrt{y^2-x^2} = k^2 - 2y$$

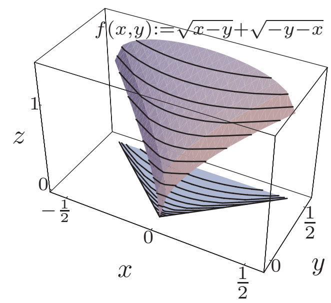
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} k^2 - 2y \ge 0, \\ 4(y^2 - x^2) = (k^2 - 2y)^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} k^2/2 \ge y, \\ y = \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} k^2/2 \ge \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4}, \\ y = \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{k^2}{4} \ge \frac{1}{k^2}x^2, \\ y = \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -k^2/2 \le x \le k^2/2, \\ y = \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4}. \end{cases}$$

L'insieme di livello k è dunque dato dall'arco della parabola $y = \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{k^2}{4}$ per il quale $-k^2/2 \le x \le k^2/2$. Si osserva che i due punti $(\pm k^2/2, k^2/2)$ sono i punti in cui la parabola tocca (tangenzialmente) le bisettrici del terzo e quarto quadrante.
Infine l'insieme di livello $k = 0$ è dato dall'unico punto $(0,0)$.







5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$, che ha come soluzioni $1 \pm i\sqrt{2}$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t) = e^t\left(C_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + C_2 \cos(t\sqrt{2})\right).$$

b. Per la teoria, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$. Si ha $\bar{y}'(t) = 2at + b$, e $\bar{y}''(t) = 2a$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente $2a - 2(2at + b) + 3(at^2 + bt + c) = 9t^2 + 1$, cioè, raccogliendo t,

$$3at^2 + (-4a + 3b)t + (2a - 2b + 3c) = 9t^2 + 1,$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} 3a = 9, \\ -4a + 3b = 0, \\ 2a - 2b + 3c = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzione $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, perciò la soluzione generale dell'equazione è allora

$$y(t) = e^t\left(C_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + C_2 \cos(t\sqrt{2})\right) + 3t^2 + 4t + 1.$$

c. Derivando si ottiene

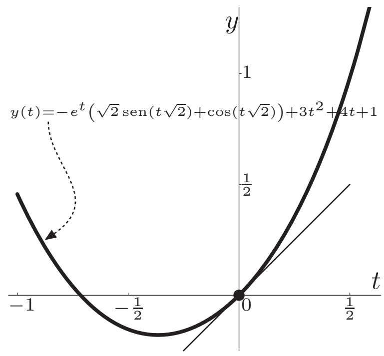
$$y'(t) = e^t\left((C_1 - C_2\sqrt{2}) \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + (C_2 + C_1\sqrt{2}) \cos(t\sqrt{2})\right) + 6t + 4.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_2 + 1 = 0, \\ C_2 + C_1\sqrt{2} + 4 = 1, \end{cases}$$

quindi $C_1 = -\sqrt{2}$, $C_2 = -1$ e la soluzione cercata è

$$y(t) = -e^t\left(\sqrt{2}\operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + \cos(t\sqrt{2})\right) + 3t^2 + 4t + 1.$$



Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 28 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{x^2}-3x^2)}{x \operatorname{sen} x + \cos x - e^{2x} + 2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{4-x\operatorname{sen} x}}{\log\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\log x)-2x^2}{\sqrt{9+2x}-5x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2xe^x-x^2}{\tan(3x)-4x}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità, derivabilità e il segno della funzione;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
e. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $f(x) = e^{-2x}(x^2+3e^x)$

a. calcolare l'integrale definito $\int_0^1 f(x)\,dx$;
b. calcolare, se esiste, l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{-y-x}$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

5. Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine $y'' - y' + y = 2t^2 + 1$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Compito B

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2, 4+2, 6, 2+4+3.

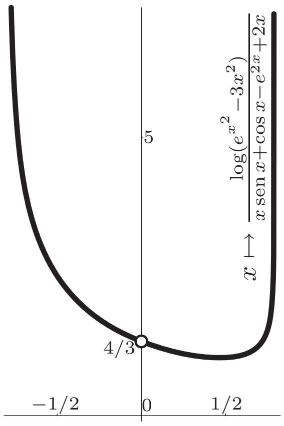
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

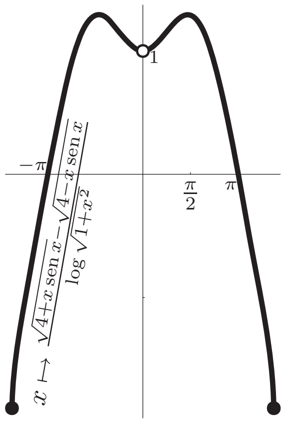
Analisi Matematica, compito B

Prova Scritta del 28 giugno 2002

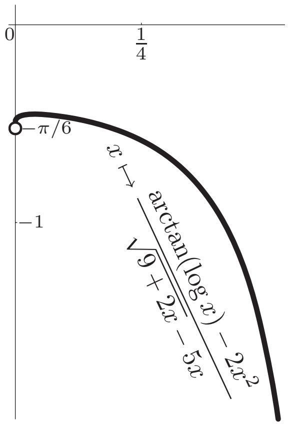
Svolgimento



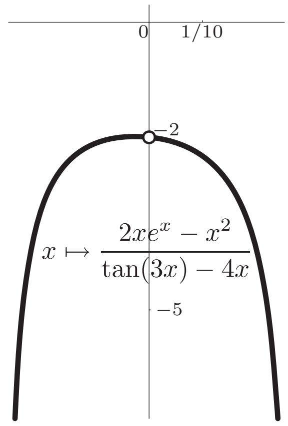
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^{x^2}-3x^2)}{x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x-e^{2x}+2x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2xe^{x^2}-6x}{e^{x^2}-3x^2}}{\mathrm{sen}\,x+x\cos x-\mathrm{sen}\,x-2e^{2x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-6x}{x\cos x-2e^{2x}+2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-6}{\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x-4e^{2x}}=\frac{2+0-6}{1-0-4}=\frac{4}{3}.$$

b. Dopo una prima trasformazione e l'isolamento di un fattore non indeterminato, si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x\,\mathrm{sen}\,x}-\sqrt{4-x\,\mathrm{sen}\,x}}{\log\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\log(1+x^2)}\cdot\frac{(4+x\,\mathrm{sen}\,x)-(4-x\,\mathrm{sen}\,x)}{\sqrt{4+x\,\mathrm{sen}\,x}+\sqrt{4-x\,\mathrm{sen}\,x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{4}{\sqrt{4+x\,\mathrm{sen}\,x}+\sqrt{4-x\,\mathrm{sen}\,x}}}_{\to 4}\cdot\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{\log(1+x^2)}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{\log(1+x^2)}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x+x\cos x}{\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\overbrace{1+x^2}^{\to 1}}{2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x+x\cos x}{x}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}+\cos x\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=1.$$

c. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(\log x)-2x^2}{\sqrt{9+2x}-5x}=\frac{-\pi/2-0}{\sqrt{9}-0}=-\frac{\pi}{6}\,.$$

d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-x^2}{\tan(3x)-4x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x+2e^x-2x}{\frac{3}{\cos^2(3x)}-4}=\frac{0+2-0}{3-4}=-2\,.$$

Alternativamente, dividendo per x, si ottiene

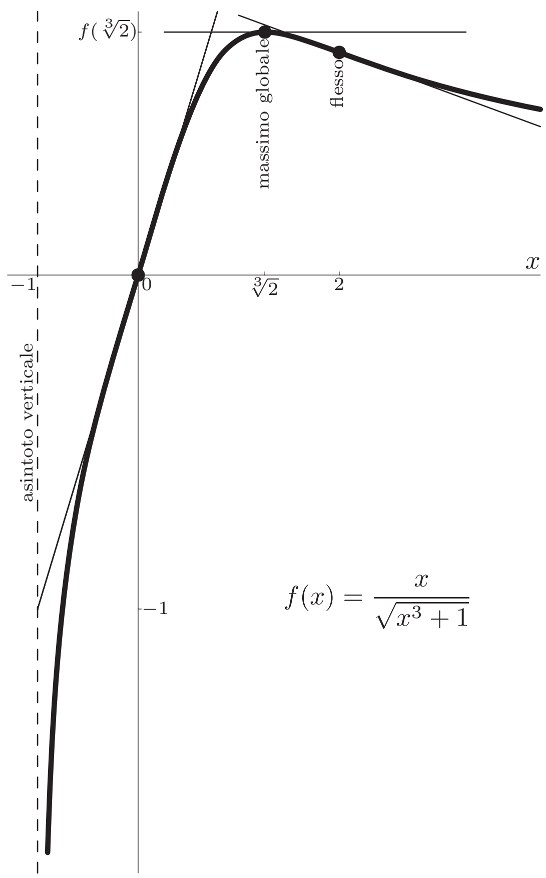
$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-x^2}{\tan(3x)-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-x}{3\frac{\tan(3x)}{3x}-4}=\frac{2-0}{3\cdot 1-4}=-2\,.$$

2.a+b. Il dominio è dato dagli x che soddisfano $x^3+1>0$ ovvero $\mathcal{D}=\,]-1,+\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}=0\,.$$

Quindi la funzione non ammette minimo assoluto. La retta $x=-1$ è un asintoto verticale, mentre l'asse x è un asintoto orizzontale a $+\infty$. Ristretta al dominio, $f(x)$ è banalmente positiva se $x>0$, negativa se $-1<x<0$, e si annulla in $x=0$.



c. La derivata prima è

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^3+1}-x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}=\frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{3/2}}\,.$$

Ristretti al dominio, si ha che $f'(x)\geq 0$ se e solo se $2-x^3\geq 0$ ovvero se $x\leq\sqrt[3]{2}$. La funzione è dunque crescente su $]-1,\sqrt[3]{2}[$ e decrescente su $]\sqrt[3]{2},+\infty[$. In $x=\sqrt[3]{2}$ c'è un massimo locale (e globale).

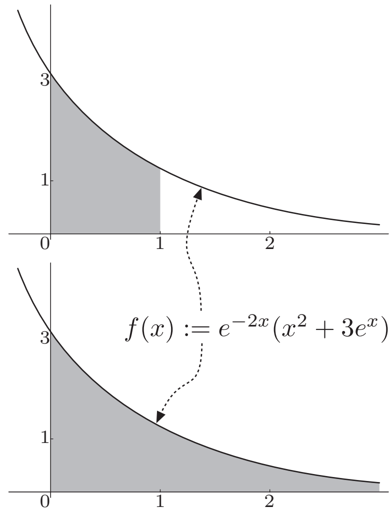
d. La derivata seconda è

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{-3x^2(x^3+1)^{3/2}-(2-x^3)\frac{3}{2}(x^3+1)^{1/2}(3x^2)}{2(x^3+1)^3}\\ &=\frac{3x^2(x^3-8)}{4(x^3+1)^{5/2}}\,. \end{aligned}$$

Si ha che $f''(x)\geq 0$ se e solo se $x^3-8\geq 0$ ovvero se $x\geq 2$. La funzione è dunque convessa su $]2,+\infty[$ e concava su $]-1,2[$. In $x_1=2$ ha un punto di flesso. Anche nell'origine la derivata seconda si annulla, ma non si tratta di un flesso, perché la derivata seconda non cambia di segno in quel punto.

3. Dopo alcuni semplici passaggi si utilizza il metodo per parti due volte

$$\begin{aligned} \int e^{-2x}(x^2+3e^x)\,dx &= \int x^2e^{-2x}\,dx+3\int e^{-x}\,dx=\\ &=-3e^{-x}+\int x^2e^{-2x}\,dx=\\ &=-3e^{-x}+\left(-\frac{x^2}{2}e^{-2x}+\int xe^{-2x}\,dx\right)=\\ &=-3e^{-x}-\frac{x^2}{2}e^{-2x}+\left(-\frac{x}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\right)=\\ &=-3e^{-x}-\frac{x^2}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c=:F(x)+c \end{aligned}$$



Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ha, per $M>0$

$$\int_0^M f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_0^M=\frac{13}{4}-3e^{-M}-\Big(\frac{M^2}{2}+\frac{M}{2}+\frac{1}{4}\Big)e^{-2M}\,,$$

per cui

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{13}{4}-3e^{-1}-\frac{5}{4}e^{-2},\qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(x)\,dx=\frac{13}{4}\,.$$

4. a. Il dominio è dato da

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq y,\ -x\geq y\right\},$$

che geometricamente rappresenta il quarto di piano compreso tra le bisettrici del terzo e quarto quadrante.

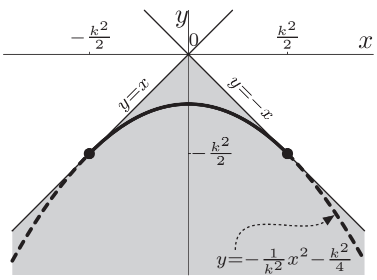
b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y)=k$, ovvero $\sqrt{x-y}+\sqrt{-y-x}=k$. È chiaro che tale insieme risulta vuoto per $k<0$. Per $k>0$ si può elevare al quadrato, per cui l'insieme di livello (quando (x,y) è ristretto al dominio della funzione) è dato da

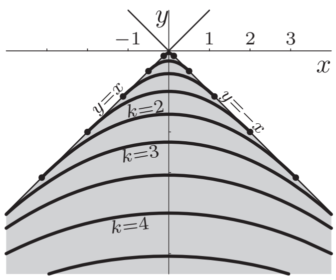
$$(x-y)+2\sqrt{y^2-x^2}+(-y-x)=k^2 \iff 2\sqrt{y^2-x^2}=k^2+2y \iff$$

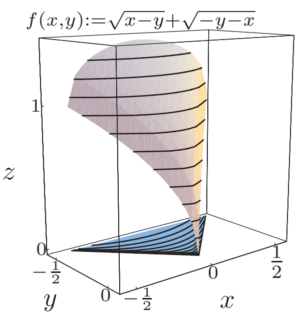
$$\iff \begin{cases} k^2+2y\geq 0,\\ 4(y^2-x^2)=(k^2+2y)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y\geq -k^2/2,\\ y=-\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4}\geq -k^2/2\\ y=-\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2\leq k^4/4\\ y=-\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -k^2/2\leq x\leq k^2/2\\ y=-\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4} \end{cases}$$

L'insieme di livello k è dunque dato dall'arco della parabola $y=-\frac{1}{k^2}x^2-\frac{k^2}{4}$ per il quale $-k^2/2\leq x\leq k^2/2$. Si osserva che i due punti $(\pm k^2/2,-k^2/2)$ sono i punti in cui la parabola tocca (tangenzialmente) le bisettrici del terzo e quarto quadrante.
Infine l'insieme di livello $k=0$ è dato dall'unico punto $(0,0)$.







5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-\lambda+1=0$, che ha come soluzioni $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$z(t)=e^{t/2}\big(C_1\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2)+C_2\cos(t\sqrt{3}/2)\big).$$

b. Per la teoria, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t)=at^2+bt+c$. Si ha $\bar{y}'(t)=2at+b$, e $\bar{y}''(t)=2a$. Allora $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente $2a-(2at+b)+(at^2+bt+c)=2t^2+1$, cioè, raccogliendo t,

$$at^2+(-2a+b)t+(2a-b+c)=2t^2+1,$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} a=2,\\ -2a+b=0,\\ 2a-b+c=1, \end{cases}$$

che ha come soluzione $a=2$, $b=4$, $c=1$, perciò la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t)=e^{t/2}\big(C_1\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2)+C_2\cos(t\sqrt{3}/2)\big)+2t^2+4t+1.$$

c. Derivando e raccogliendo si ottiene

$$y'(t)=(e^{t/2}/2)\big((C_1-\sqrt{3}C_2)\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2)+ (C_2+\sqrt{3}C_1)\cos(t\sqrt{3}/2)\big)+4t+4.$$

Imponendo le condizioni $y(0)=0$ e $y'(0)=1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_2+1=0,\\ \frac{1}{2}(C_2+\sqrt{3}C_1)+4=1, \end{cases}$$

quindi $C_1=-5/\sqrt{3}$, $C_2=-1$ e la soluzione cercata è

$$y(t)=-e^{t/2}\big((5/\sqrt{3})\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2)+\cos(t\sqrt{3}/2)\big)+2t^2+4t+1.$$