Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Compitino del 12 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)}\quad \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{5x^7+2x^3+1}}\,dx\,, \qquad \text{(b)}\quad \int_1^2 \frac{3x+4}{(x-1)^{1/3}\cdot(x+1)^2}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{3/2}+3n^2+5}{4n^{7/3}+4n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-(n-1)!}{n(n!+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2^n+1}{5\cdot 2^n+3}\Big)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)e^n}{n!}$

3. Data l'equazione differenziale $y'+2y=3t-1$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y''-2y'-3y=e^t$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\Big(\dfrac{1}{(x-1)^2+y^2}-4\Big)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=x^3+y^2+3xy+27y-5$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito A

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

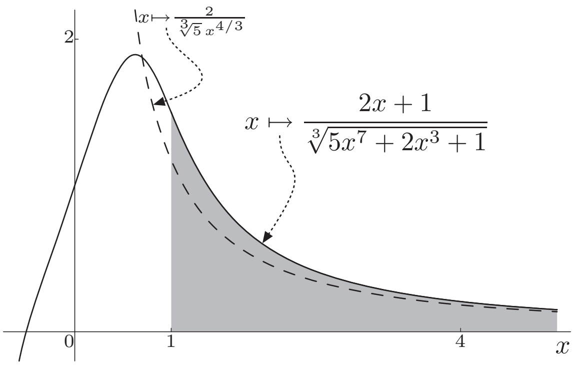
Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

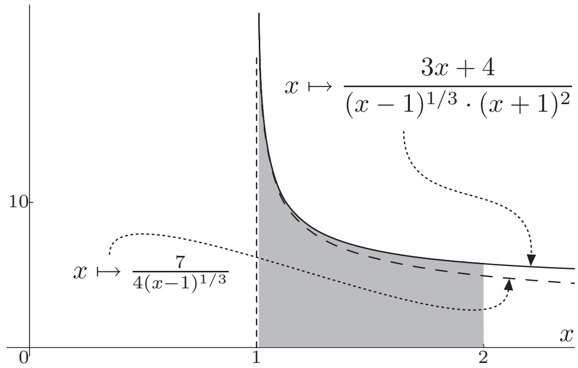
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 12 giugno 2002

Svolgimento





1. a. La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty[$. Poiché all'infinito f è asintotica a $2x/\sqrt[3]{5x^7} = 2/(\sqrt[3]{5}\, x^{4/3})$ il cui integrale converge all'∞ (essendo $4/3 > 1$), anche l'integrale dato converge.

b. La funzione integranda è definita e continua su $]1, 2]$. Bisogna dunque valutare la convergenza in 1. La funzione $h(x) = (3x+4)/(x+1)^2$ è definita, continua e non nulla in un intorno di 1 avendosi $h(1) = 7/4$. La funzione integranda è dunque asintotica in 1 alla funzione $7/(4(x-1)^{1/3})$ il cui integrale converge essendo $1/3 < 1$. Allora anche l'integrale dato converge.

2. a. Il termine generale della serie è asintotico a $3n^2/(4n^{7/3}) = 3/(4n^{1/3})$ la cui serie diverge, essendo $1/3 < 1$. Dunque anche la serie data diverge.

b. Dividendo numeratore e denominatore per $(n-1)!$, si ha

$$\frac{(n+1)! - (n-1)!}{n(n!+1)} = \frac{n(n+1) - 1}{n(n + \frac{1}{(n-1)!})}$$

che converge a 1 quando n tende all'infinito. Il criterio necessario non è dunque soddisfatto e di conseguenza la serie non converge. Essendo a termini positivi concludiamo che diverge.

c. Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2^n+1}{5\cdot 2^n + 3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{5 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{5} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

d. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((n+1)+1)e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)e^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(e \frac{n+2}{(n+1)^2}\right) = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

3. a. L'equazione omogenea associata è

$$z' + 2z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(t) = c\,e^{-2t}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b. Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(t) = at + b$. Determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(t) = a$ perciò

$$\bar{y}'(t) + 2y(t) = 3t - 1,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + 2(at + b) = 3t - 1,\ \forall t$$
$$\Longleftrightarrow \qquad (2a-3)t + (2b + a + 1) = 0,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2a - 3 = 0 \\ 2b + a + 1 = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = 3/2$, $b = -5/4$ perciò $\bar{y}(t) = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(t) = \bar{y}(t) + z(t) = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4} + c\,e^{-2t},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. a. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ che ha radici -1 e 3. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t},$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(t) = ae^t,$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Essendo $y_p'(t) = y_p''(t) = ae^t$, affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(t) - 2y_p'(t) - 3y_p(t) = e^t$ per ogni t, il che equivale a

$$ae^t - 2ae^t - 3ae^t = e^t,\ \forall\, t \qquad \Longleftrightarrow \qquad (4a+1)e^t = 0,$$

ovvero $a = -1/4$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(t) = -e^t/4$ e la generica soluzione è allora

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{4}e^t.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - \frac{1}{4}e^t.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1/4 = 0, \\ -C_1 + 3C_2 - 1/4 = 1, \end{cases}$$

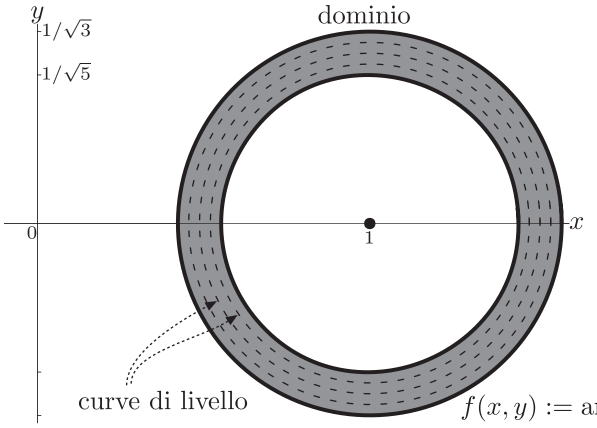
che ha come soluzione $C_1 = -1/8$, $C_2 = 3/8$, quindi la soluzione cercata è

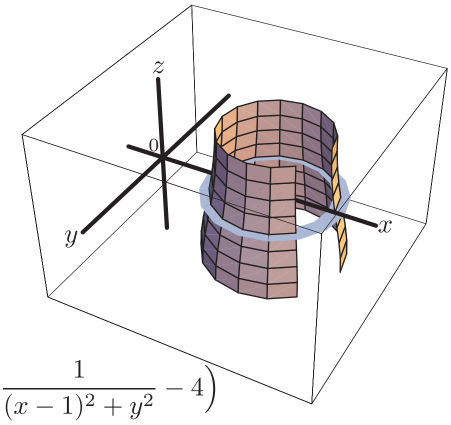
$$y(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{3}{8}e^{3t} - \frac{1}{4}e^t.$$

5. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \neq (1,0) :\ -1 \leq \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} - 4 \leq 1\right\} = \left\{(x,y) :\ \frac{1}{5} \leq (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

Il dominio è dunque la corona circolare compresa tra le due circonferenze $(x-1)^2 + y^2 = 1/5$ e $(x-1)^2 + y^2 = 1/3$, circonferenze comprese. Si osservi inoltre che il punto $(1,0)$ dove si annulla il denominatore dell'argomento dell'arcoseno, non appartiene a tale insieme.





$$f(x,y) := \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{(x-1)^2+y^2} - 4\right)$$

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| > \pi/2$ tale insieme è vuoto, altrimenti equivale a $1/((x-1)^2+y^2) - 4 = \operatorname{sen} k$ ovvero $(x-1)^2+y^2 = 1/(4+\operatorname{sen} k)$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(1,0)$. Al variare di $k \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(1,0)$.

6. I punti critici di f soddisfano il sistema

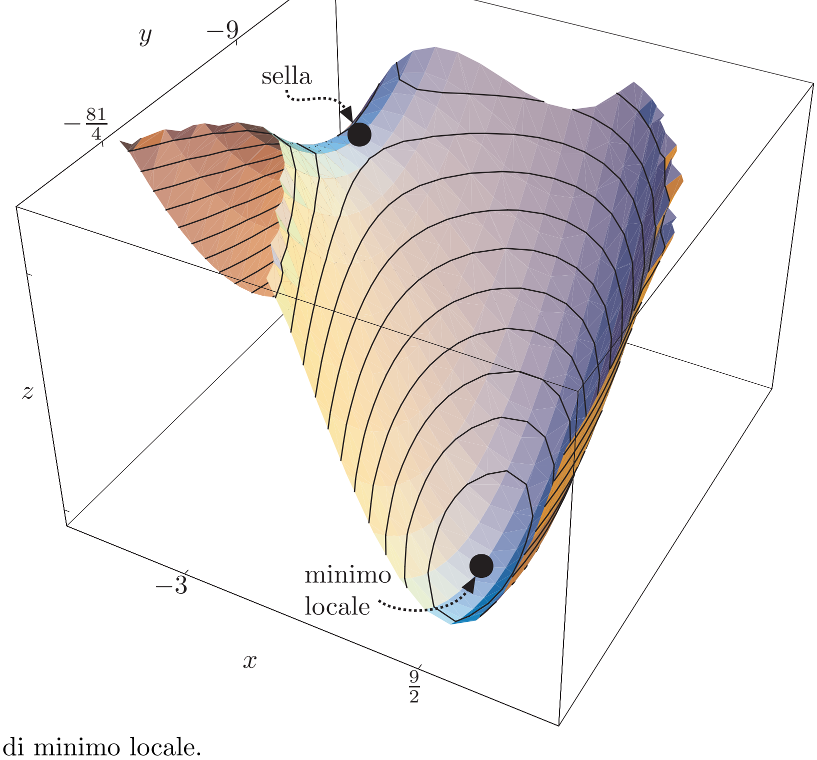
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3x + 27 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = -x^2$ che sostituita all'interno della seconda fornisce $2x^2 - 3x - 27 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = -3$ e $x_2 = 9/2$. I punti critici sono dunque $(-3,-9)$ e $(9/2, -81/4)$. L'Hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(4x-3)\,.$$

Si ha $H(-3,-9) = -45 < 0$, quindi $(-3,-9)$ è un punto di sella, mentre $H(9/2,-81/4) = 45 > 0$, quindi $(9/2,-81/4)$ è un punto di massimo o minimo locale. Poiché la traccia della matrice Hessiana è positiva, il punto è di minimo locale.

$$f(x,y) := x^3 + y^2 + 3xy + 27y - 5$$



Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Compitino del 12 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 \frac{x^3+1}{(x+2)\cdot(2-x)^{3/2}}\,dx\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{2x^3+3x+2}}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n^{3/2}+5}{2n^3+n^{7/2}+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2((n-1)!+1)}{(n+1)!-n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3+\log n}{1+2\log n}\Big)^n$

3. Data l'equazione differenziale $y'-y=t+3$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y''+4y'+3y=e^t$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\Big(\dfrac{1}{x^2+(y-1)^2}-3\Big)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=y^3+x^2-2xy-8x-1$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito B

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

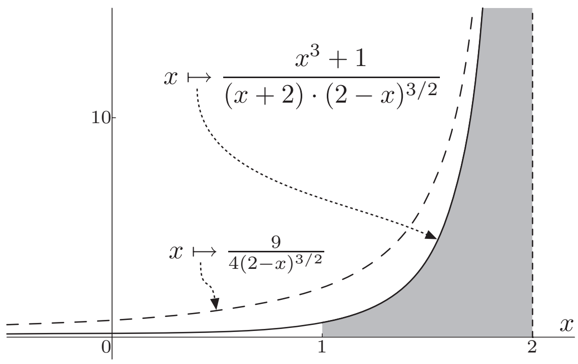
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

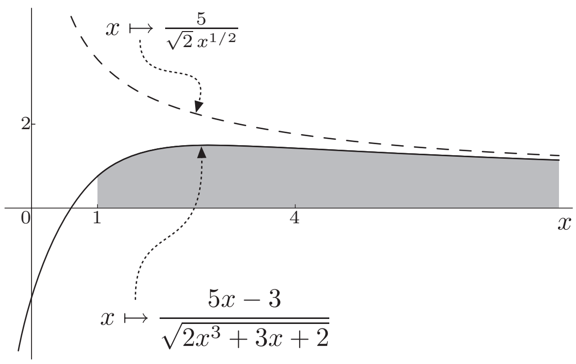
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 12 giugno 2002

Svolgimento





1. a. La funzione integranda è definita e continua su $[1,2[$. Bisogna dunque valutare la convergenza in 2. La funzione $h(x)=(x^3+1)/(x+2)$ è definita, continua e non nulla in un intorno di 2 avendosi $h(2)=9/4$. La funzione integranda è dunque asintotica in 2 alla funzione $9/(4(2-x)^{3/2})$ il cui integrale diverge essendo $3/2>1$. Allora anche l'integrale dato diverge.

b. La funzione integranda f è definita e continua su $[1,+\infty[$. Poiché all'infinito f è asintotica a $5x/\sqrt{2x^3} = 5/(\sqrt{2}\,x^{1/2})$ il cui integrale diverge all'∞ (essendo $1/2<1$), anche l'integrale dato diverge.

2. a. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{(2(n+1)+1)3^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(2n+1)3^n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(3\frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)}\Big)=0\,,$$

si conclude che la serie converge.

b. Il termine generale della serie è asintotico a $n^2/n^{7/2}=1/n^{3/2}$ la cui serie converge, essendo $3/2>1$. Dunque anche la serie data converge.

c. Dividendo numeratore e denominatore per $(n-1)!$, si ha

$$\frac{n^2((n-1)!+1)}{(n+1)!-n!} = \frac{n^2(1+\frac{1}{(n-1)!})}{n(n+1)-n} = 1+\frac{1}{(n-1)!}$$

che converge a 1 quando n tende all'infinito. Il criterio necessario non è dunque soddisfatto e di conseguenza la serie non converge. Essendo a termini positivi concludiamo che diverge.

d. Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\Big(\frac{3+\log n}{1+2\log n}\Big)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{\log n}}{2+\frac{1}{\log n}} = \frac{1}{2}<1$$

si ottiene che la serie converge.

3. a. L'equazione omogenea associata è

$$z' - z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(t) = ce^t$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b. Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(t) = at + b$. Determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(t) = a$ perciò

$$\bar{y}'(t) - y(t) = t + 3,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - (at + b) = t + 3,\ \forall t$$
$$\Longleftrightarrow \qquad (a+1)t + (b - a + 3) = 0,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a + 3 = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = -1$, $b = -4$ perciò $\bar{y}(t) = -t - 4$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(t) = \bar{y}(t) + z(t) = -t - 4 + c\, e^t\,,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. a. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ che ha radici -1 e -3. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}\,,$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(t) = ae^t\,,$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Essendo $y_p'(t) = y_p''(t) = ae^t$, affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(t) + 4y_p'(t) + 3y_p(t) = e^t$ per ogni t, il che equivale a

$$ae^t + 4ae^t + 3ae^t = e^t,\ \forall\, t \qquad \Longleftrightarrow \qquad (8a - 1)e^t = 0\,,$$

ovvero $a = 1/8$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(t) = e^t/8$ e la generica soluzione è allora

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{8} e^t\,.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{3t} + \frac{1}{8} e^t\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1/8 = 0, \\ -C_1 - 3C_2 + 1/8 = 1 \end{cases}$$

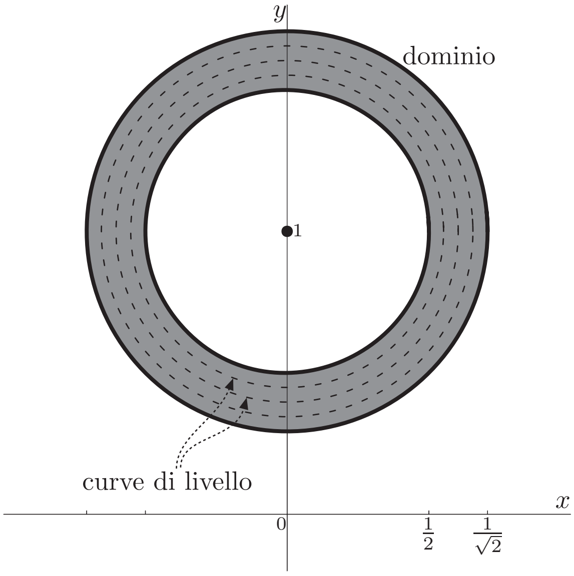
che ha come soluzione $C_1 = 1/4$, $C_2 = -3/8$, quindi la soluzione cercata è

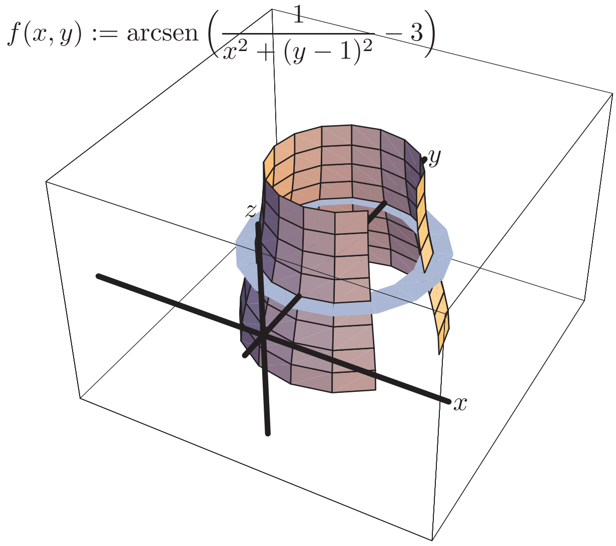
$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{3}{8} e^{-3t} + \frac{1}{8} e^t\,.$$

5. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \neq (0, 1) :\ -1 \leq \frac{1}{x^2 + (y-1)^2} - 3 \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) :\ \frac{1}{4} \leq x^2 + (y-1)^2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Il dominio è dunque la corona circolare compresa tra le due circonferenze $x^2 + (y-1)^2 = 1/4$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1/2$, circonferenze comprese. Si osservi inoltre che il punto $(0, 1)$ dove si annulla il denominatore dell'argomento dell'arcoseno, non appartiene a tale insieme.





L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| > \pi/2$ tale insieme è vuoto, altrimenti equivale a $1/(x^2+(y-1)^2) - 3 = \operatorname{sen} k$ ovvero $x^2 + (y-1)^2 = 1/(3 + \operatorname{sen} k)$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(0,1)$. Al variare di $k \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(0,1)$.

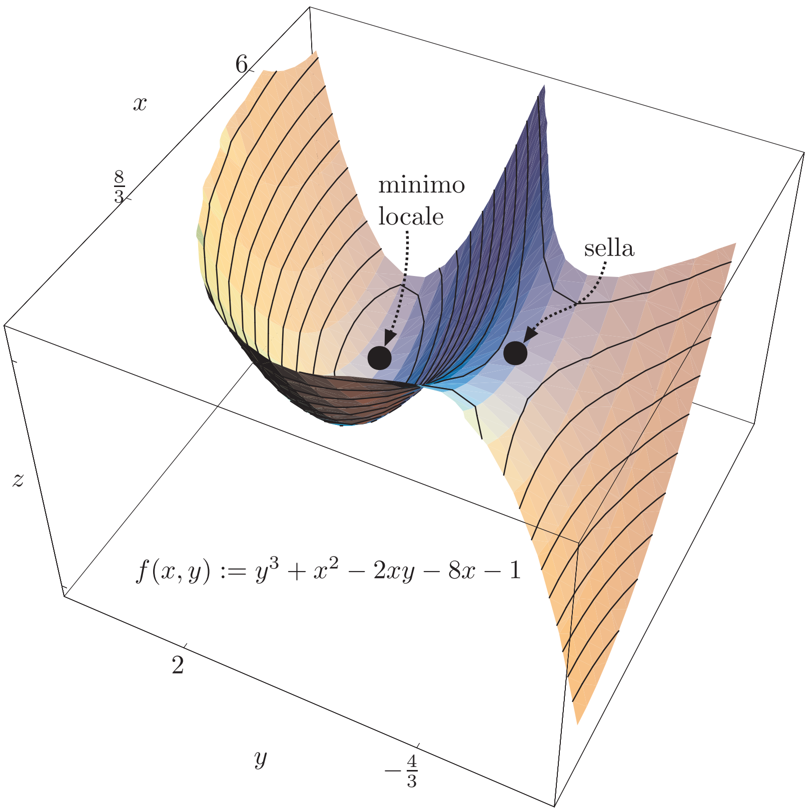
6. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 8 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $x = 3y^2/2$ che sostituita all'interno della prima fornisce $3y^2 - 2y - 8 = 0$ le cui soluzioni sono $y_1 = -4/3$ e $y_2 = 2$. I punti critici sono dunque $(8/3, -4/3)$ e $(6,2)$. L'Hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{vmatrix} = 4(3y-1)\,.$$

Si ha $H(8/3, -4/3) = -20 < 0$, quindi $(8/3, -4/3)$ è un punto di sella, mentre $H(6,2) = 20 > 0$, quindi $(6,2)$ è un punto di massimo o minimo locale. Poiché la traccia della matrice Hessiana è positiva, il punto è di minimo locale.



Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Compitino del 12 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2 \cdot (1-x)^{1/2}}\, dx\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{7x+2}{\sqrt[3]{x^4+2x+5}}\, dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!-1}{n!-(n-1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+2\sqrt{n}}{2+3\sqrt{n}}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)2^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{3/2}+2n+1}{5n^2+n^{5/2}+2}$

3. Data l'equazione differenziale $y' + y = t - 2$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y'' + 3y' + 2y = e^t$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2+(y+1)^2} - 2\right)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x + 3$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito C

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

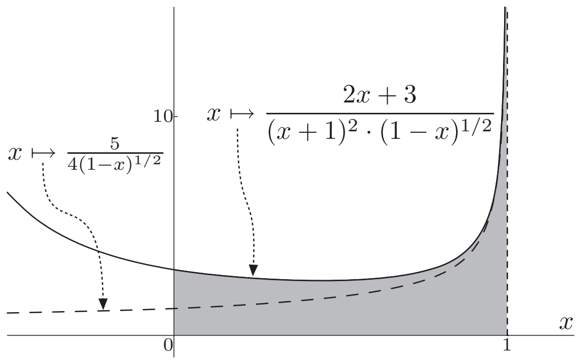
Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

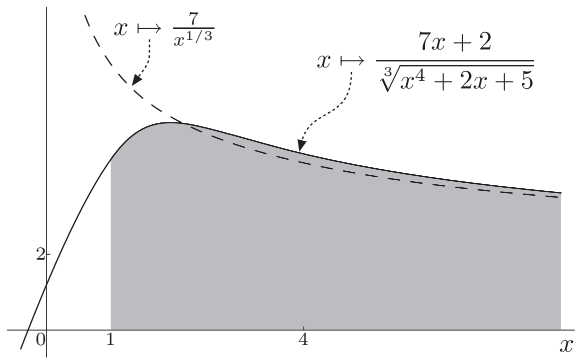
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 12 giugno 2002

Svolgimento





1. a. La funzione integranda è definita e continua su $[0,1[$. Bisogna dunque valutare l'andamento in 1. La funzione $h(x) = (2x+3)/(x+1)^2$ è definita, continua e non nulla in un intorno di 1 avendosi $h(1) = 5/4$. La funzione integranda è dunque asintotica in 1 alla funzione $5/(4(1-x)^{1/2})$ il cui integrale converge essendo $1/2 < 1$. Allora anche l'integrale dato converge.

b. La funzione integranda f è definita e continua su $[1,+\infty[$. Poiché all'infinito f è asintotica a $7x/\sqrt[3]{x^4} = 7/x^{1/3}$ il cui integrale diverge all'∞ (essendo $1/3 < 1$), anche l'integrale dato diverge.

2. a. Dividendo numeratore e denominatore per $(n-1)!$, si ha

$$\frac{(n+1)!-1}{n!-(n-1)!} = \frac{n(n+1) - \frac{1}{(n-1)!}}{n-1}$$

che converge a $+\infty$ quando n tende all'infinito. Il criterio necessario non è dunque soddisfatto e di conseguenza la serie non converge. Essendo a termini positivi concludiamo che diverge.

b. Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5+2\sqrt{n}}{2+3\sqrt{n}}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{\sqrt{n}}}{3+\frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{3} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

c. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{((n+1)+2)2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n+2)2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

d. Il termine generale della serie è asintotico a $3n^{3/2}/n^{5/2} = 3/n$ la cui serie diverge. Dunque anche la serie data diverge.

3. a. L'equazione omogenea associata è
$$z' + z = 0$$
che dalla teoria ha soluzione generale $z(t) = c\,e^{-t}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b. Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(t) = at + b$. Determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(t) = a$ perciò

$$\begin{aligned} &\bar{y}'(t) + y(t) = t - 2,\ \forall t \qquad \iff \qquad a + (at + b) = t - 2,\ \forall t \\ \iff \qquad &(a-1)t + (b + a + 2) = 0,\ \forall t \qquad \iff \qquad \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b + a + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sistema che ha come soluzione $a = 1$, $b = -3$ perciò $\bar{y}(t) = t - 3$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque
$$y(t) = \bar{y}(t) + z(t) = t - 3 + c\,e^{-t}\,,$$
al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. a. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ che ha radici -1 e -2. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\,,$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo
$$y_p(t) = ae^t\,,$$
dove $a \in \mathbb{R}$. Essendo $y_p'(t) = y_p''(t) = ae^t$, affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = e^t$ per ogni t, il che equivale a

$$ae^t + 3ae^t + 2ae^t = e^t,\ \forall\, t \qquad \iff \qquad (6a - 1)e^t = 0\,,$$

ovvero $a = 1/6$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(t) = e^t/6$ e la generica soluzione è allora
$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t\,.$$

c. Derivando si ottiene
$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t\,.$$
Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1/6 = 0, \\ -C_1 - 2C_2 + 1/6 = 1, \end{cases}$$

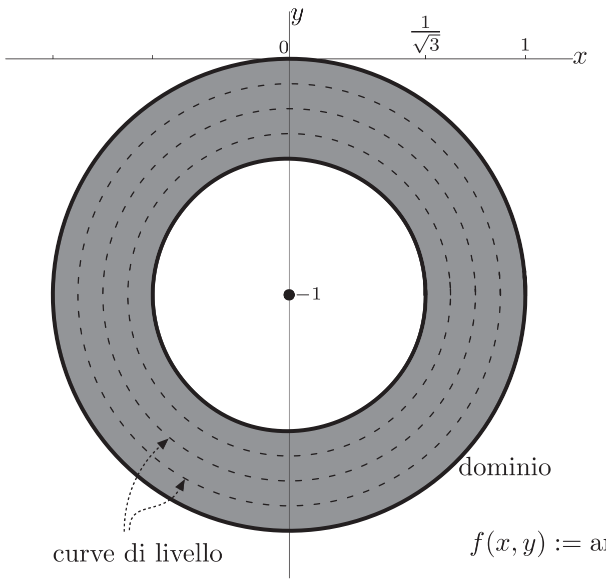
che ha come soluzione $C_1 = 1/2$, $C_2 = -2/3$, quindi la soluzione cercata è

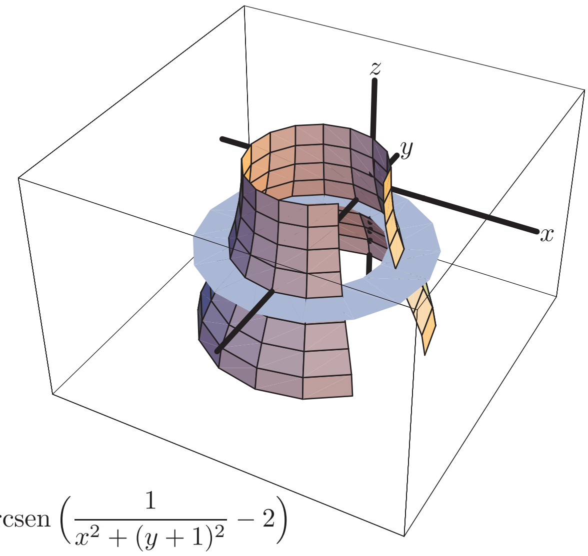
$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t\,.$$

5. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \neq (0,-1) :\ -1 \leq \frac{1}{x^2 + (y+1)^2} - 2 \leq 1\right\} = \left\{(x,y) :\ \frac{1}{3} \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 1\right\}.$$

Il dominio è dunque la corona circolare compresa tra le due circonferenze $x^2+(y+1)^2 = 1/3$ e $x^2+(y+1)^2 = 1$, circonferenze comprese. Si osservi inoltre che il punto $(0, -1)$ dove si annulla il denominatore dell'argomento dell'arcoseno, non appartiene a tale insieme.





$$f(x,y) := \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+(y+1)^2}-2\right)$$

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y)=k$. Per $|k|>\pi/2$ tale insieme è vuoto, altrimenti equivale a $1/(x^2+(y+1)^2)-2=\operatorname{sen}k$ ovvero $x^2+(y+1)^2=1/(2+\operatorname{sen}k)$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(0,-1)$. Al variare di $k\in[-\pi/2,\pi/2]$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(0,-1)$.

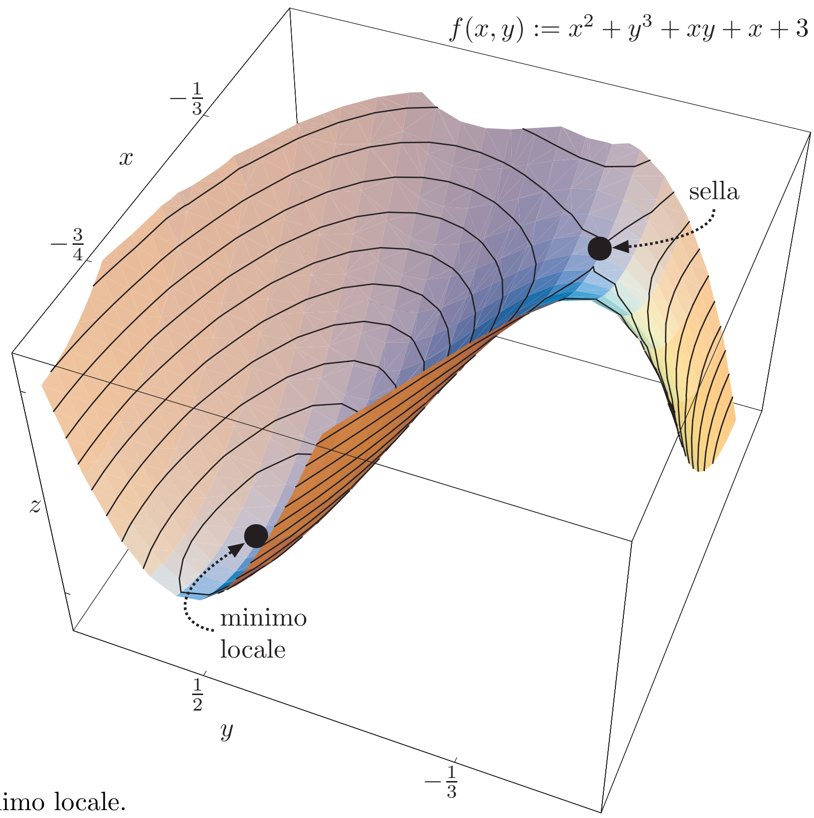
6. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+y+1=0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+x=0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $x=-3y^2$ che sostituita all'interno della prima fornisce $6y^2-y-1=0$ le cui soluzioni sono $y_1=-1/3$ e $y_2=1/2$. I punti critici sono dunque $(-1/3,-1/3)$ e $(-3/4,1/2)$. L'Hessiano è

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 12y-1\,.$$

Si ha $H(-1/3,-1/3)=-5<0$, quindi $(-1/3,-1/3)$ è un punto di sella, mentre si ha $H(-3/4,1/2)=5>0$, quindi $(-3/4,1/2)$ è un punto di massimo o minimo locale. Poiché la traccia della matrice Hessiana è positiva, il punto è di minimo locale.



Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica

Compitino del 12 giugno 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt[3]{5x^8+2x^5+1}}\,dx\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^3 \frac{x^3+2}{(x+1)^{1/2}\cdot(x-1)}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4+\log n}{2+3\log n}\Big)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)4^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{1/2}+n+5}{2n^{5/2}+n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!-(n-1)!}{n((n-2)!+3)}$

3. Data l'equazione differenziale $y'+3y=t-1$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y''-y'-6y=e^t$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\Big(\dfrac{3}{(x+1)^2+y^2}-4\Big)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=x^3-y^2-3xy+27y+2$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito D

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

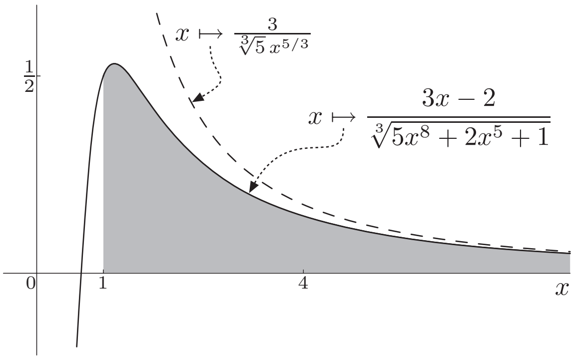
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

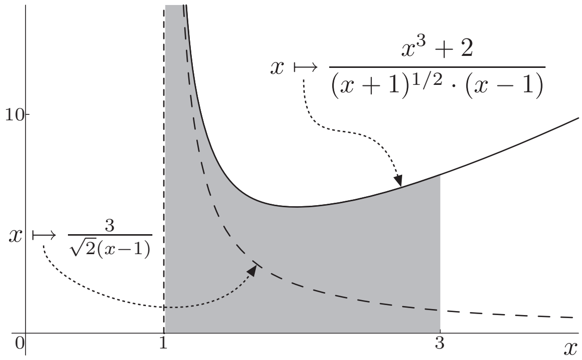
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 12 giugno 2002

Svolgimento





1. a. La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty[$. Poiché all'infinito f è asintotica a $3x/\sqrt[3]{5x^8} = 3/(\sqrt[3]{5}\,x^{5/3})$ il cui integrale converge all'∞ (essendo $5/3 > 1$), anche l'integrale dato converge.

b. La funzione integranda è definita e continua su $]1, 3]$. Bisogna dunque valutare la convergenza in 1. La funzione $h(x) = (x^3+2)/(x+1)^{1/2}$ è definita, continua e non nulla in un intorno di 1 avendosi $h(1) = 3/\sqrt{2}$. La funzione integranda è dunque asintotica in 1 alla funzione $3/(\sqrt{2}(x-1))$ il cui integrale diverge. Allora anche l'integrale dato diverge.

2. a. Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4+\log n}{2+3\log n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{4}{\log n}}{3+\frac{2}{\log n}} = \frac{1}{3} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

b. Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((n+1)-1)4^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n-1)4^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n^2-1} = 0 < 1\,,$$

si conclude che la serie converge.

c. Il termine generale della serie è asintotico a $n/(2n^{5/2}) = 1/(2n^{3/2})$ la cui serie converge, essendo $3/2 > 1$. Dunque anche la serie data converge.

d. Dividendo numeratore e denominatore per $(n-2)!$, si ha

$$\frac{n! - (n-1)!}{n((n-2)!+3)} = \frac{n(n-1)-(n-1)}{n(1+\frac{3}{(n-2)!})}$$

che diverge a $+\infty$ quando n tende all'infinito. Il criterio necessario non è dunque soddisfatto e di conseguenza la serie non converge. Essendo a termini positivi concludiamo che diverge.

3. a. L'equazione omogenea associata è

$$z' + 3z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(t) = ce^{-3t}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b. Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(t) = at + b$. Determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(t) = a$ perciò

$$\bar{y}'(t) + 3y(t) = t - 1,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + 3(at + b) = t - 1,\ \forall t$$
$$\Longleftrightarrow \qquad (3a - 1)t + (3b + a + 1) = 0,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 3a - 1 = 0 \\ 3b + a + 1 = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = 1/3$, $b = -4/9$ perciò $\bar{y}(t) = \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(t) = \bar{y}(t) + z(t) = \frac{1}{3}t - \frac{4}{9} + c\,e^{-3t},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. a. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - \lambda - 6$ che ha radici -2 e 3. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t},$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(t) = ae^t,$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Essendo $y_p'(t) = y_p''(t) = ae^t$, affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(t) - y_p'(t) - 6y_p(t) = e^t$ per ogni t, il che equivale a

$$ae^t - ae^t - 6ae^t = e^t,\ \forall\, t \qquad \Longleftrightarrow \qquad (6a + 1)e^t = 0,$$

ovvero $a = -1/6$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(t) = -e^t/6$ e la generica soluzione è allora

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{6}e^t.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{3t} - \frac{1}{6}e^t.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1/6 = 0, \\ -2C_1 + 3C_2 - 1/6 = 1, \end{cases}$$

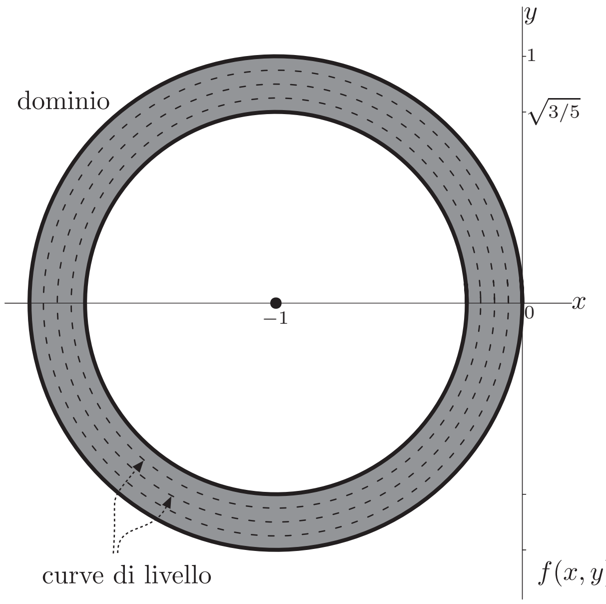
che ha come soluzione $C_1 = -2/15$, $C_2 = 3/10$, quindi la soluzione cercata è

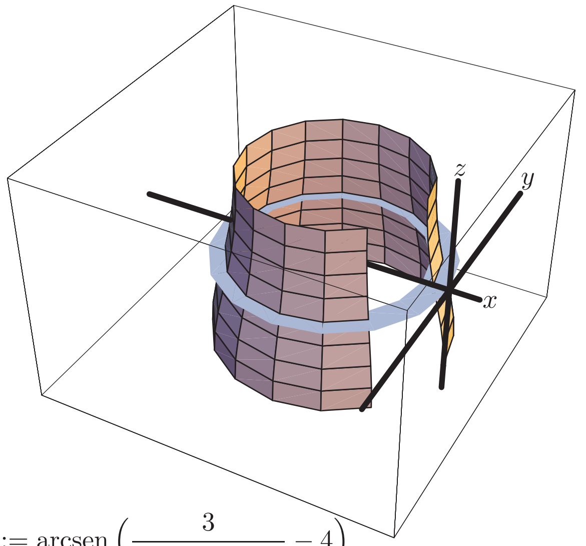
$$y(t) = -\frac{2}{15}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{3t} - \frac{1}{6}e^t.$$

5. Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \neq (-1, 0) :\ -1 \leq \frac{3}{(x+1)^2 + y^2} - 4 \leq 1\right\} = \left\{(x, y) :\ \frac{3}{5} \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Il dominio è dunque la corona circolare compresa tra le due circonferenze $(x+1)^2 + y^2 = \frac{3}{5}$ e $(x+1)^2 + y^2 = 1$, circonferenze comprese. Si osservi inoltre che il punto $(-1, 0)$ dove si annulla il denominatore dell'argomento dell'arcoseno, non appartiene a tale insieme.





$f(x,y) := \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3}{(x+1)^2+y^2} - 4\right)$

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Per $|k| > \pi/2$ tale insieme è vuoto, altrimenti equivale a $3/((x+1)^2+y^2) - 4 = \operatorname{sen} k$ ovvero $(x+1)^2 + y^2 = 3/(4 + \operatorname{sen} k)$ che è l'equazione di una circonferenza di centro $(-1,0)$. Al variare di $k \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'insieme di livello k descrive un fascio di circonferenze concentriche di centro $(-1,0)$.

6. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y - 3x + 27 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = x^2$ che sostituita all'interno della seconda fornisce $2x^2 + 3x - 27 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = -9/2$ e $x_2 = 3$. I punti critici sono dunque $(-9/2, 81/4)$ e $(3,9)$. L'Hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -3(4x+3)\,.$$

Si ha $H(3,9) = -45 < 0$, quindi $(3,9)$ è un punto di sella, mentre $H(-9/2, 81/4) = 45 > 0$, quindi $(-9/2, 81/4)$ è un punto di massimo o minimo locale. Poiché la traccia della matrice Hessiana è negativa, il punto è di massimo locale.

$f(x,y) := x^3 - y^2 - 3xy + 27y + 2$