Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica

Compitino del 13 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3xe^x - \operatorname{sen}(3x)}{2x\cos x - \log(1+2x)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x - \arctan(3x+x^2)}{x^2 + 2\operatorname{sen}(1-\cos x)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x^2}{3x - \log(e+3x)}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{3x - 4\log x}{2x \operatorname{sen}\frac{1}{2x} - 1}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-4x^4} + 2x^2 \operatorname{arcsen}(2x^2) - 1}{x^3 \operatorname{sen}(3x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{6-x-x^2}{e^{2-x}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{\log(x-1)}{2x+3}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{2-\arctan x}{1+x^2}$, (b) $\dfrac{x^2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x}}{x}$, (c) $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $3x(\log x + 2)^2$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \tan x$ (conviene ricordare la relazione fondamentale tra $\cos^2 x$ e $\tan^2 x$)

$$\int \frac{3\tan x + 1}{1 - 5\cos^2 x}\, dx\,.$$

Compito A

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

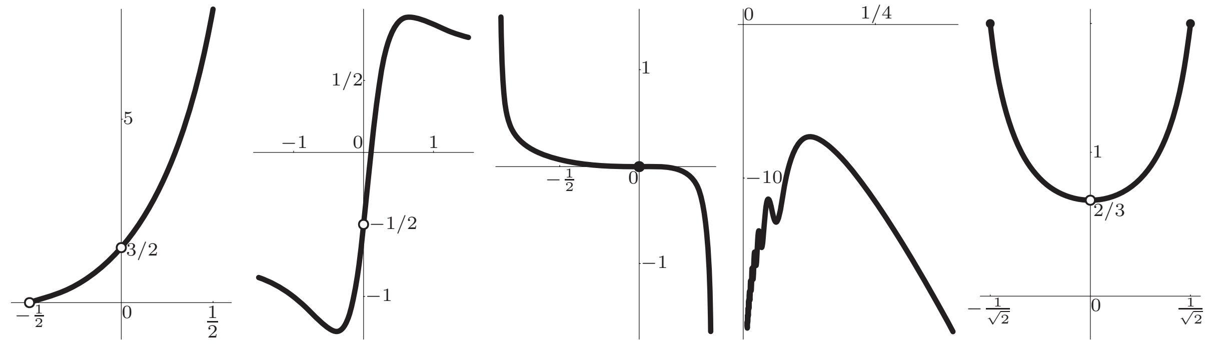
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica, compito A

Compitino del 13 marzo 2002

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1. a. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x-\operatorname{sen}(3x)}{2x\cos x-\log(1+2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^x+3xe^x-3\cos(3x)}{2\cos x-2x\operatorname{sen}x-\frac{2}{1+2x}}$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x+3\operatorname{sen}(3x)}{-2\operatorname{sen}x-x\cos x+\frac{2}{(1+2x)^2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 3/2.

b. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\arctan(3x+x^2)}{x^2+2\operatorname{sen}(1-\cos x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{3+2x}{1+(3x+x^2)^2}}{2x+2\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2(1+(3x+x^2)^2)}\cdot\frac{3(3x+x^2)^2-2x}{x+\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3(3x+x^2)^2-2x}{x+\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6(3x+x^2)(3+2x)-2}{1-\operatorname{sen}(1-\cos x)\operatorname{sen}^2x+\cos(1-\cos x)\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0-2}{1-0+1}=-\frac{1}{2}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 1/2.

c. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x^2}{3x-\log(e+3x)}=\frac{0}{0-1}=0\,.$$

d. Il limite richiesto non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x-4\log x}{2x\operatorname{sen}\frac{1}{2x}-1}=\left[\frac{0-(-\infty)}{0\cdot\{\text{funz. limitata}\}-1}\right]=-\infty\,.$$

e. Si può applicare de L'Hôpital ripetutamente (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x^4}+2x^2\operatorname{arcsen}(2x^2)-1}{x^3\operatorname{sen}(3x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-16x^3}{2\sqrt{1-4x^4}}+2x^2\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}+4x\operatorname{arcsen}(2x^2)}{3x^2\operatorname{sen}(3x)+3x^3\cos(3x)}=$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(2x^2)}{x\operatorname{sen}(3x)+x^2\cos(3x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}}{\operatorname{sen}(3x)+5x\cos(3x)-3x^2\operatorname{sen}(3x)}=$$

$$=\frac{16}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(3x)+5x\cos(3x)-3x^2\operatorname{sen}(3x)}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{16}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{8\cos(3x)-21x\operatorname{sen}(3x)-9x^2\cos(3x)}=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{3}.$$

Alternativamente, si poteva direttamente dividere numeratore e denominatore per x^4 ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x^4}+2x^2\operatorname{arcsen}(2x^2)-1}{x^3\operatorname{sen}(3x)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\Big((-4)\frac{\sqrt{1-4x^4}-1}{-4x^4}+4\frac{\operatorname{arcsen}(2x^2)}{2x^2}\Big)\right]=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\Big(\frac{-4}{2}+4\Big)=\frac{2}{3},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

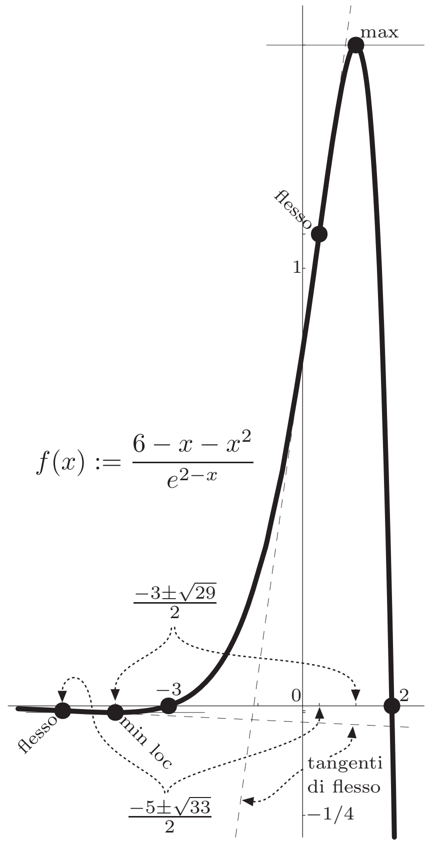
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{1+z}-1}{z}=\frac{1}{2},$$

che possono essere verificati mediante de L'Hôpital. Si osservi che il terzo limite non è altro che la derivata della funzione $z\mapsto\sqrt{z}$ calcolata in 1. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 2/3.

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai ed è ovunque continua e derivabile. Si osservi che la funzione può essere scritta come $f(x)=(6-x-x^2)e^{x-2}$, una forma sicuramente più comoda da derivare. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[\frac{-\infty}{0^+}\right]=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0\,,$$

poiché la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio (alternativamente provare ad usare de L'Hôpital).



c. Poiché l'esponenziale è sempre positivo, si ha che $f(x)\geq 0$ se e solo se $6-x-x^2\geq 0$ ovvero sse $-3\leq x\leq 2$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x)=(-1-2x)e^{x-2}+(6-x-x^2)e^{x-2}=(5-3x-x^2)e^{x-2}\,.$$

Il segno di $f'(x)$ coincide col segno di $5-3x-x^2\geq 0$. Quindi

$$f'(x)\begin{cases}<0, & \text{se } x<(-3-\sqrt{29})/2 \text{ o } x>(-3+\sqrt{29})/2,\\ =0, & \text{se } x=(-3-\sqrt{29})/2 \text{ oppure } x=(-3+\sqrt{29})/2\\ >0, & \text{se } (-3-\sqrt{29})/2<x<(-3+\sqrt{29})/2.\end{cases}$$

La funzione è dunque crescente su $](-3-\sqrt{29})/2,(-3+\sqrt{29})/2[$, decrescente su $]-\infty,(-3-\sqrt{29})/2[$ e su $](-3+\sqrt{29})/2,+\infty[$, ed ammette un minimo ed un massimo relativo rispettivamente per $x=(-3-\sqrt{29})/2$ e $x=(-3+\sqrt{29})/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x)=(-2x-3)e^{x-2}+(5-3x-x^2)e^{x-2}=-(x^2+5x-2)e^{x-2}\,.$$

Il segno di $f''(x)$ è l'opposto di quello di x^2+5x-2. La f risulta concava sugli intervalli $]-\infty, (-5-\sqrt{33})/2[$ e $](-5+\sqrt{33})/2, +\infty[$, mentre è convessa su $](-5-\sqrt{33})/2, (-5+\sqrt{33})/2[$. In corrispondenza di $(-5\pm\sqrt{33})/2$, la funzione ha due punti di flesso.

3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} =]1, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. I limiti agli estremi sono:

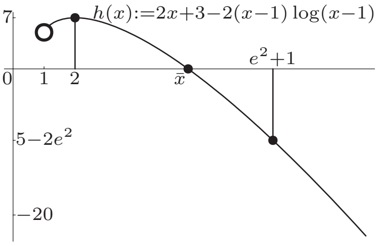
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \left[\frac{-\infty}{5}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,,$$

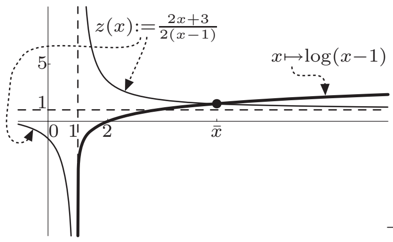
poiché la funzione logaritmo è dominata da ogni polinomio (alternativamente, provare ad usare de L'Hôpital). Per $x > 1$ il denominatore è sempre positivo, per cui $f(x) > 0$ se e solo se $x - 1 > 1$ ovvero $x > 2$, mentre $f(x) < 0$ se $1 < x < 2$. Infine la funzione si annulla per $x = 2$.

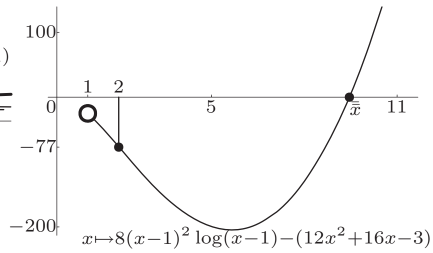
c. Per $x > 1$, la derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\frac{2x+3}{x-1} - 2\log(x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{2x+3-2(x-1)\log(x-1)}{(x-1)(2x+3)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo su $\mathcal{D}$, quindi il segno della derivata prima $g'(x)$ coincide con quello del numeratore $h(x) := 2x+3-2(x-1)\log(x-1)$. La disequazione $h(x) > 0$ non è risolubile esplicitamente.







d. Osserviamo che poiché $h(2) = 7 > 0$, $h(e^2+1) = 5-2e^2 < 0$ ed $h(x)$ è continua, il teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]2, e^2+1[$ per il quale $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$ (vedi figura sopra a sinistra). Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo.

Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.

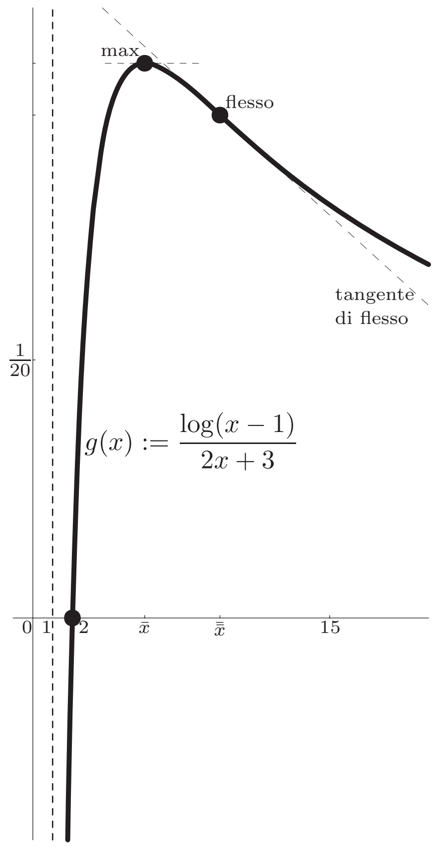
[I metodo]: la disequazione $g'(x) \ge 0$ equivale a $\log(x-1) \le \frac{2x+3}{2(x-1)}$. La funzione $\log(x-1)$ è strettamente crescente su $]1, +\infty[$ con $\lim_{x\to1^+}\log(x-1) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\log(x-1) = +\infty$, mentre la funzione $z(x) := \frac{2x+3}{2(x-1)}$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo con $\lim_{x\to1^+} z(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 1$. Graficamente (vedi figura sopra al centro) si deduce che esiste un unico punto $\bar{x}$ per cui

$$\begin{cases} \log(x-1) < \frac{2x+3}{x-1}, & \text{se } 1 < x < \bar{x}, \\ \log(x-1) = \frac{2x+3}{x-1}, & \text{se } x = \bar{x}, \\ \log(x-1) > \frac{2x+3}{x-1}, & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 1 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$

In particolare g è crescente su $]1, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.



[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -2\log(x-1)$, si ha che $h(x)$ è crescente se $1 < x < 2$ e decrescente per $x > 2$, quindi per il Teorema degli zeri esiste un unico (per la stretta monotonia su $]2,+\infty[$) punto $\bar{x}$ tale che $h(\bar{x}) = 0$. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{(x-1)^2(2x+3)^4}\Big[-2\log(x-1)(x-1)(2x+3)^2 - \\ &\quad - (2x+3-2(x-1)\log(x-1))((2x+3)^2+(x-1)2(2x+3)2)\Big] = \\ &= \frac{8(x-1)^2\log(x-1) - (12x^2+16x-3)}{(x-1)^2(2x+3)^3} \end{aligned}$$

Il segno di g'' è quello del suo numeratore, che vale -77 in $x = 2$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g. (Vedi il grafico in alto a destra nella pagina precedente)

4. Si spezza in somma:

$$\begin{aligned} \int \frac{2-\arctan x}{1+x^2}\,dx &= 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx+ = \\ &= 2\arctan x - \int \arctan x\,d(\arctan x) = 2\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}}{x}\,dx &= \int x^{5/4}\,dx + 3\int x^{-2/3}\,dx = \frac{1}{1+5/4}x^{1+5/4} + \frac{3}{1-2/3}x^{1-2/3} + c = \\ &= \frac{4}{9}x^{9/4} + 9x^{1/3} + c, \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx &= 2\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx - 3\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \\ &= -2\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) - 3\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = -2\log|\cos x| - 3\log|\operatorname{sen} x| + c. \end{aligned}$$

5. Per parti due volte:

$$\begin{aligned} \int 3x(\log x+2)^2\,dx &= \frac{3x^2}{2}(\log x+2)^2 - \frac{3}{2}\int x^2\,2\frac{\log x+2}{x}\,dx = \\ &= \frac{3x^2}{2}(\log x+2)^2 - 3\left(\frac{x^2}{2}(\log x+2) - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = \\ &= \frac{3x^2}{4}\big(2(\log x+2)^2 - 6(\log x+2) + 3\big) + c \end{aligned}$$

6. Ricordando la relazione $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$, e che $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$, mediante la sostituzione $t = \tan x$ ci si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\begin{aligned} &\int \frac{3\tan x+1}{1-5\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3\tan x+1}{\frac{1}{\cos^2 x}-5}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3\tan x+1}{(1+\tan^2 x)-5}\,d(\tan x) = \\ &= \int \frac{3t+1}{t^2-4}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2-4}\,dt + \int \frac{1}{t^2-4}\,dt = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2-4}\,d(t^2-4) + \int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\,dt = \frac{3}{2}\log|t^2-4| + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\log|t^2-4| + \frac{1}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t+2| + c = \\
&= \frac{3}{2}\log|\tan^2 x-4| + \frac{1}{4}\log|\tan x-2| - \frac{1}{4}\log|\tan x+2| + c
\end{aligned}
$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per ogni x per cui è definita la tangente e tale che $\cos x \neq \pm 1/\sqrt{5}$ (il che equivale a $\tan x \neq \pm 2$).
Alternativamente si poteva notare che

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3t+1}{t^2-4}\,dt &= \frac{7}{4}\int \frac{1}{t-2}\,dt + \frac{5}{4}\int \frac{1}{t+2}\,dt = \frac{7}{4}\log|t-2| + \frac{5}{4}\log|t+2| + c = \\
&= \frac{7}{4}\log|\tan x-2| + \frac{5}{4}\log|\tan x+2| + c
\end{aligned}
$$

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica

Compitino del 13 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: | | | | | | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2xe^x - \operatorname{sen}(2x)}{3x\cos x - \log(1+3x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{(e^{3x+1}-1)\cos x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x + 5\log x}{x^2(2-\cos\frac{1}{x})}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \arctan(2x+3x^2)}{4x^2 - \operatorname{sen}(1-\cos x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-9x^4} + 3x^2 \operatorname{arcsen}(3x^2) - 1}{2x^3\operatorname{sen}(2x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{e^{2x-1}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{\log(x-2)}{1-3x}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{3\arctan x + 4}{1+x^2}$, (b) $\dfrac{x\sqrt{x} - 3x^3\sqrt[3]{x}}{2x^2}$, (c) $\dfrac{3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $2x(\log x - 1)^2$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \tan x$ (conviene ricordare la relazione fondamentale tra $\cos^2 x$ e $\tan^2 x$)

$$\int \frac{\tan x - 2}{1 - 10\cos^2 x}\, dx\,.$$

Compito B

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

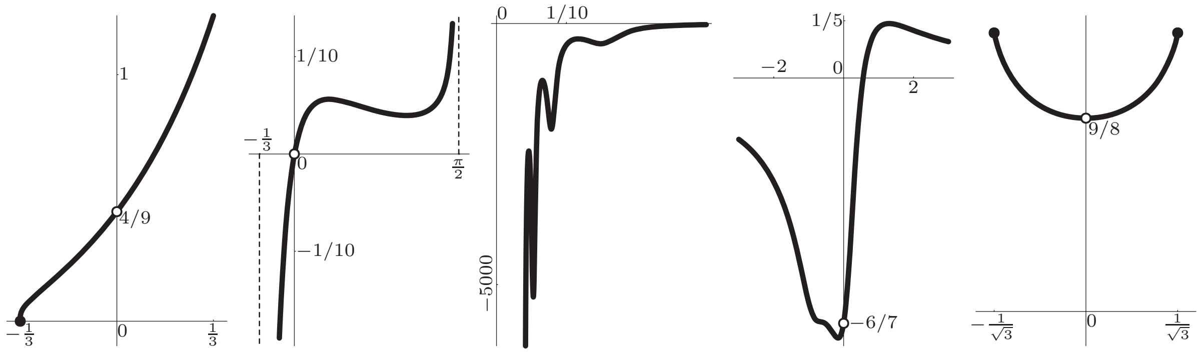
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica, compito B

Compitino del 13 marzo 2002

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1. a. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-\operatorname{sen}(2x)}{3x\cos x-\log(1+3x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^x+2xe^x-2\cos(2x)}{3\cos x-3x\operatorname{sen}x-\frac{3}{1+3x}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x+2\operatorname{sen}(2x)}{-2\operatorname{sen}x-x\cos x+\frac{3}{(1+3x)^2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 4/9.

b. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen}x}{(e^{3x+1}-1)\cos x}=\frac{0}{e-1}=0\,.$$

c. Il limite richiesto non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+5\log x}{x^2(2-\cos\frac{1}{x})}=\left[\frac{0-\infty}{0^+\cdot\{\text{funz. limitata}>0\}}\right]=-\infty\,.$$

d. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arctan(2x+3x^2)}{4x^2-\operatorname{sen}(1-\cos x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{2+6x}{1+(2x+3x^2)^2}}{8x-\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{1+(2x+3x^2)^2}\cdot\frac{(2x+3x^2)^2-3x}{8x-\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{(2x+3x^2)^2-3x}{8x-\cos(1-\cos x)\operatorname{sen}x}=$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{2(2x+3x^2)(2+6x)-3}{8+\operatorname{sen}(1-\cos x)\operatorname{sen}^2x-\cos(1-\cos x)\cos x}=2\cdot\frac{0-3}{8+0-1}=-\frac{6}{7}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-6/7$.

e. Si può applicare de L'Hôpital ripetutamente (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-9x^4}+3x^2\operatorname{arcsen}(3x^2)-1}{2x^3\operatorname{sen}(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-36x^3}{2\sqrt{1-9x^4}}+3x^2\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}+6x\operatorname{arcsen}(3x^2)}{3x^2\operatorname{sen}(2x)+2x^3\cos(2x)}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(3x^2)}{3x\operatorname{sen}(2x)+2x^2\cos(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} 3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}}{3\operatorname{sen}(2x)+10x\cos(2x)-4x^2\operatorname{sen}(2x)}=$$

$$=18\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\operatorname{sen}(2x)+10x\cos(2x)-4x^2\operatorname{sen}(2x)}=$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} 18\lim_{x\to 0}\frac{1}{16\cos(2x)-28x\operatorname{sen}(2x)-8x^2\cos(2x)}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}.$$

Alternativamente, si poteva direttamente dividere numeratore e denominatore per x^4 ottenendo

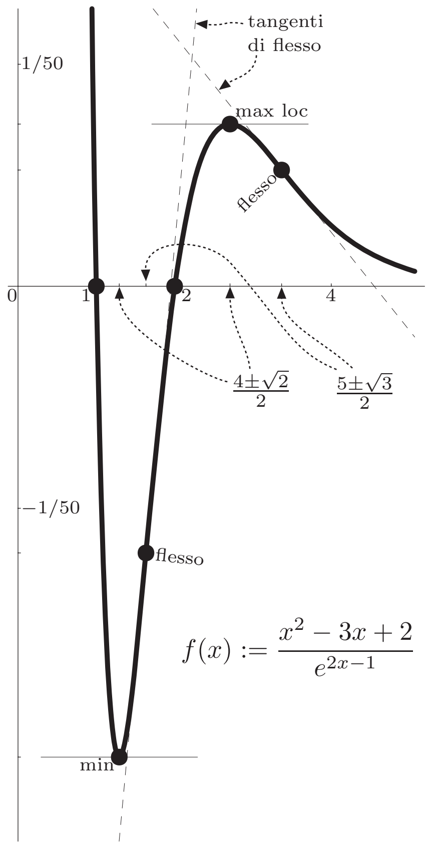
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-9x^4}+3x^2\operatorname{arcsen}(3x^2)-1}{2x^3\operatorname{sen}(2x)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}\left((-9)\frac{\sqrt{1-9x^4}-1}{-9x^4}+9\frac{\operatorname{arcsen}(3x^2)}{3x^2}\right)\right]=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\left(\frac{-9}{2}+9\right)=\frac{9}{8},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{1+z}-1}{z}=\frac{1}{2},$$

che possono essere verificati mediante de L'Hôpital. Si osservi che il terzo limite non è altro che la derivata della funzione $z\mapsto\sqrt{z}$ calcolata in 1. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 9/8.



2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai ed è ovunque continua e derivabile. Si osservi che la funzione può essere scritta come $f(x)=(x^2-3x+2)e^{1-2x}$, una forma sicuramente più comoda da derivare. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\left[\frac{+\infty}{0^+}\right]=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0\,,$$

poiché la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio (alternativamente provare ad usare de L'Hôpital).

c. Poiché l'esponenziale è sempre positivo, si ha che $f(x)\geq 0$ se e solo se $x^2-3x+2\geq 0$ ovvero sse $x\leq 1$ oppure $x\geq 2$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x)=(2x-3)e^{1-2x}-2(x^2-3x+2)e^{1-2x}=-(2x^2-8x+7)e^{1-2x}.$$

Il segno di $f'(x)$ coincide col segno di $2x^2-8x+7$, per cui

$$f'(x)\begin{cases}<0, & \text{se } x<2-\sqrt{2}/2 \text{ o } x>2+\sqrt{2}/2,\\ =0, & \text{se } x=2-\sqrt{2}/2 \text{ oppure } x=2+\sqrt{2}/2\\ >0, & \text{se } 2-\sqrt{2}/2<x<2+\sqrt{2}/2.\end{cases}$$

La funzione è dunque crescente su $]2-\sqrt{2}/2,2+\sqrt{2}/2[$, decrescente su $]-\infty,2-\sqrt{2}/2[$ e su $]2+\sqrt{2}/2,+\infty[$, ed ammette un minimo ed un massimo relativo rispettivamente per $x=2-\sqrt{2}/2$ e $x=2+\sqrt{2}/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x)=(8-4x)e^{1-2x}-2(8x-7-2x^2)e^{1-2x}=2(2x^2-10x+11)e^{1-2x}.$$

Il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $2x^2 - 10x + 11$. La f risulta convessa sugli intervalli $]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[$ e $]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, mentre è concava su $]\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}[$. In corrispondenza di $\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$, la funzione ha due punti di flesso.

3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} =]2, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. I limiti agli estremi sono:

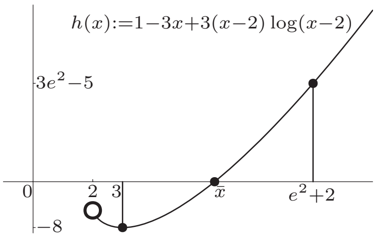
$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \left[\frac{-\infty}{-5}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,,$$

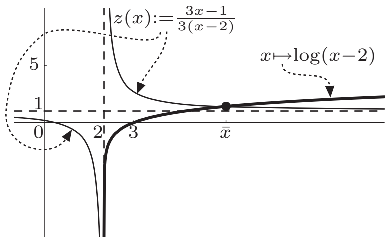
poiché la funzione logaritmo è dominata da ogni polinomio (alternativamente, provare ad usare de L'Hôpital). Per $x > 2$ il denominatore è sempre negativo, per cui $f(x) > 0$ se e solo se $0 < x - 2 < 1$ ovvero $2 < x < 3$, mentre $f(x) < 0$ se $3 < x$. Infine la funzione si annulla per $x = 3$.

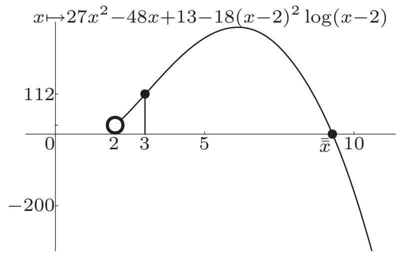
c. Per $x > 2$, la derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\frac{1-3x}{x-2} - (-3)\log(x-2)}{(1-3x)^2} = \frac{1 - 3x + 3(x-2)\log(x-2)}{(x-2)(3x-1)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo su $\mathcal{D}$, quindi il segno della derivata prima $g'(x)$ coincide con quello del numeratore $h(x) := 1 - 3x + 3(x-2)\log(x-2)$. La disequazione $h(x) \geq 0$ non è risolubile esplicitamente.







d. Osserviamo che poiché $h(3) = -8 < 0$, $h(e^2+2) = 3e^2 - 5 > 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]3, e^2+2[$ per il quale $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$ (vedi figura sopra a sinistra). Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo.

Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.

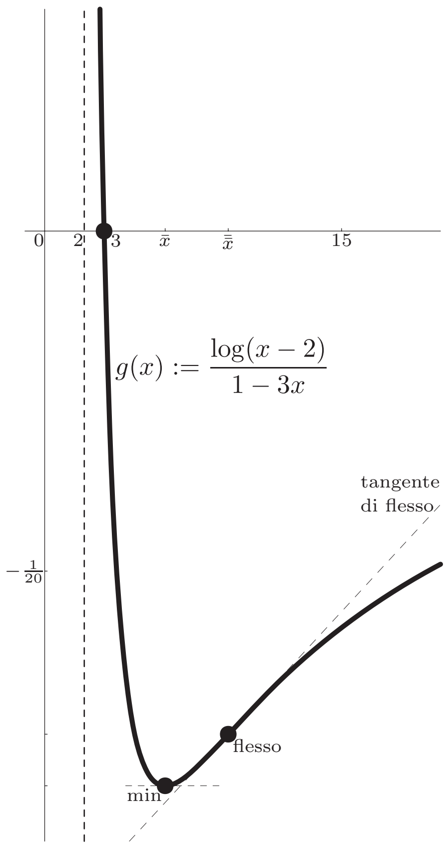
[I metodo]: la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $\log(x-2) \geq (3x-1)/(3(x-2))$. Poiché la funzione $\log(x-2)$ è strettamente crescente su $]2, +\infty[$ con $\lim_{x\to 2^+}\log(x-2) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\log(x-2) = +\infty$, e la funzione $z(x) := (3x-1)/(3(x-2))$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo con $\lim_{x\to 2^+} z(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 1$, allora graficamente (vedi figura sopra al centro) si deduce che esiste un unico punto $\bar{x}$ per cui

$$\begin{cases} \log(x-2) < \frac{3x-1}{3(x-2)}, & \text{se } 2 < x < \bar{x}, \\ \log(x-2) = \frac{3x-1}{3(x-2)}, & \text{se } x = \bar{x}, \\ \log(x-2) > \frac{3x-1}{3(x-2)}, & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } 2 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ > 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$

In particolare g è decrescente su $]2, \bar{x}[$, crescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un minimo relativo (che risulta anche minimo assoluto) in $x = \bar{x}$.



[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = 3\log(x-2)$, si ha che $h(x)$ è decrescente se $2 < x < 3$ e crescente per $x > 3$, quindi per il Teorema degli zeri (vedi figura in alto al centro nella pagina precedente) esiste un unico (per la stretta monotonia su $]3,+\infty[$) punto $\bar{x}$ tale che $h(\bar{x}) = 0$. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{1}{(x-2)^2(3x-1)^4}\Big[3\log(x-2)(x-2)(3x-1)^2 -$$
$$- (1-3x+3(x-2)\log(x-2))((3x-1)^2+(x-2)2(3x-1)3)\Big] =$$
$$= \frac{27x^2-48x+13-18(x-2)^2\log(x-2)}{(x-2)^2(3x-1)^3}$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale 112 in $x = 3$ e tende a $-\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g (vedi figura in alto a destra nella pagina precedente).

4. Si spezza in somma:

$$\int \frac{3\arctan x+4}{1+x^2}\,dx = 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 3\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= 4\arctan x + 3\int \arctan x\, d(\arctan x) = 4\arctan x + \frac{3}{2}\arctan^2 x + c$$
$$\int \frac{x\sqrt{x}-3x^3\sqrt[3]{x}}{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx - \frac{3}{2}\int x^{4/3}\,dx = \frac{1}{2(1-1/2)}x^{1-1/2} - \frac{3}{2(1+4/3)}x^{1+4/3} + c =$$
$$= \sqrt{x} - \frac{9}{14}x^{7/3} + c, \qquad (x>0)$$
$$\int \frac{3\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = -\frac{1}{2}\log|\cos x| + \frac{3}{2}\log|\operatorname{sen} x| + c.$$

5. Per parti due volte:

$$\int 2x(\log x-1)^2\,dx = \frac{2x^2}{2}(\log x-1)^2 - \int x^2\,2\frac{\log x-1}{x}\,dx =$$
$$= x^2(\log x-1)^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}(\log x-1) - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}\big(2(\log x-1)^2 - 2(\log x-1)+1\big) + c\,.$$

6. Ricordando la relazione $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$, e che $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$, mediante la sostituzione $t = \tan x$ ci si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{\tan x-2}{1-10\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\tan x-2}{\frac{1}{\cos^2 x}-10}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\tan x-2}{(1+\tan^2 x)-10}\,d(\tan x) =$$
$$= \int \frac{t-2}{t^2-9}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2-9}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2-9}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-9}\,d(t^2-9) - 2\int \frac{1}{(t-3)(t+3)}\,dt = \frac{1}{2}\log|t^2-9| - \frac{2}{6}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\log|t^2-9| - \frac{1}{3}\log|t-3| + \frac{1}{3}\log|t+3| + c = \frac{1}{2}\log|\tan^2 x-9| + \frac{1}{3}\log\left|\frac{\tan x+3}{\tan x-3}\right| + c\,.$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per ogni x per cui è definita la tangente e tale che $\cos x \neq \pm 1/\sqrt{10}$ (il che equivale a $\tan x \neq \pm 3$). Alternativamente si poteva notare che

$$\int \frac{t-2}{t^2-9}\,dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t-3}\,dt + \frac{5}{6}\int \frac{1}{t+3}\,dt = \frac{1}{6}\log|t-3| + \frac{5}{6}\log|t+3| + c =$$
$$= \frac{1}{6}\log|\tan x - 3| + \frac{5}{6}\log|\tan x + 3| + c$$

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica

Compitino del 13 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x-3x^2)}{4x^2+\operatorname{sen}(1-\cos x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{5x-2\log x}{x(3-\cos\frac{2}{x})}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+3x}{5(e^{2x+1}-1)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5xe^x-\operatorname{sen}(5x)}{3x\cos x-\log(1+3x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-16x^4}+4x^2\operatorname{arcsen}(4x^2)-1}{3x^3\operatorname{sen}x}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{e^{3-2x}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x)=\dfrac{\log(x+1)}{2x+5}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{3+\arctan x}{1+x^2}$, (b) $\dfrac{4\sqrt[3]{x}-x^3\,\sqrt[2]{x}}{2x}$, (c) $\dfrac{3\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{5\operatorname{sen}x\cos x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $4x(\log x+1)^2$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t=\tan x$ (conviene ricordare la relazione fondamentale tra $\cos^2 x$ e $\tan^2 x$)

$$\int\frac{7\tan x+1}{1-2\cos^2 x}\,dx\,.$$

Compito C

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

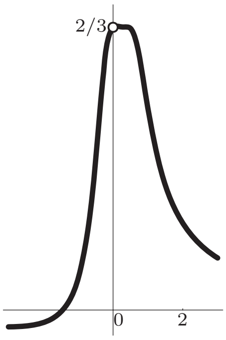
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

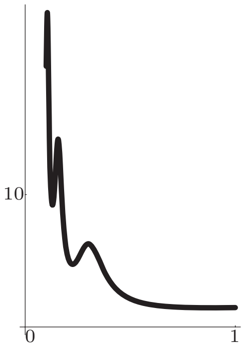
Analisi Matematica, compito C

Compitino del 13 marzo 2002

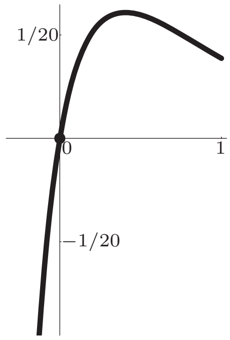
Svolgimento



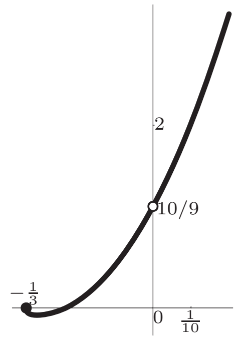
1. a.



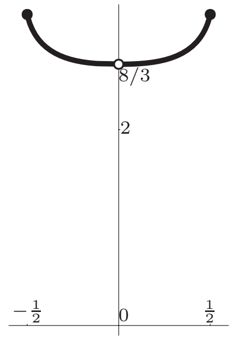
1. b.



1. c.



1. d.



1. e.

1. a. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x-3x^2)}{4x^2+\operatorname{sen}(1-\cos x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1-6x}{1+(x-3x^2)^2}}{8x+\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+(x-3x^2)^2}\cdot\frac{(x-3x^2)^2+6x}{8x+\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x}\right) = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x-3x^2)^2+6x}{8x+\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2(x-3x^2)(1-6x)+6}{8-\operatorname{sen}(1-\cos x)\operatorname{sen}^2 x+\cos(1-\cos x)\cos x} = \frac{0+6}{8-0+1} = \frac{2}{3}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 2/3.

b. Il limite richiesto non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5x-2\log x}{x(3-\cos\frac{2}{x})} = \left[\frac{0-(-\infty)}{0^+\cdot\{\text{funz. limitata}\}^+}\right] = +\infty\,.$$

c. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+3x}{5(e^{2x+1}-1)} = \frac{0}{5(e-1)} = 0\,.$$

d. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5xe^x-\operatorname{sen}(5x)}{3x\cos x-\log(1+3x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{5e^x+5xe^x-5\cos(5x)}{3\cos x-3x\operatorname{sen} x-\frac{3}{1+3x}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x+5\operatorname{sen}(5x)}{-2\operatorname{sen} x-x\cos x+\frac{3}{(1+3x)^2}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 10/9.

e. Si può applicare de L'Hôpital ripetutamente (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-16x^4}+4x^2\arcsin(4x^2)-1}{3x^3\operatorname{sen}x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-64x^3}{2\sqrt{1-16x^4}}+4x^2\frac{8x}{\sqrt{1-16x^4}}+8x\arcsin(4x^2)}{3x^2\operatorname{sen}x+x^3\cos x}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(4x^2)}{3x\operatorname{sen}x+x^2\cos x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{8}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{\sqrt{1-16x^4}}}{3\operatorname{sen}x+5x\cos x-x^2\operatorname{sen}x}=$$

$$=\frac{64}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\operatorname{sen}x+5x\cos x-x^2\operatorname{sen}x}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{64}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{8\cos x-7x\operatorname{sen}x-x^2\cos x}=\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{8}{3}.$$

Alternativamente, si poteva direttamente dividere numeratore e denominatore per x^4 ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-16x^4}+4x^2\arcsin(4x^2)-1}{3x^3\operatorname{sen}x}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\operatorname{sen}x}\Big((-16)\frac{\sqrt{1-16x^4}-1}{-16x^4}+16\frac{\arcsin(4x^2)}{4x^2}\Big)\right]=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\Big(\frac{-16}{2}+16\Big)=\frac{8}{3},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

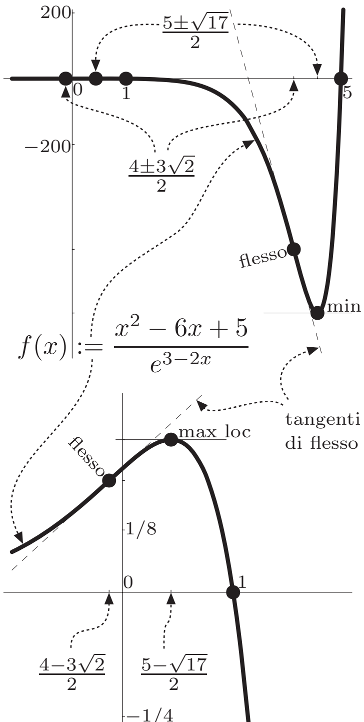
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\arcsin z}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{1+z}-1}{z}=\frac{1}{2},$$

che possono essere verificati mediante de L'Hôpital. Si osservi che il terzo limite non è altro che la derivata della funzione $z\mapsto\sqrt{z}$ calcolata in 1. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 8/3.

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai ed è ovunque continua e derivabile. Si osservi che la funzione può essere scritta come $f(x)=(x^2-6x+5)e^{2x-3}$, una forma sicuramente più comoda da derivare. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[\frac{+\infty}{0^+}\right]=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0\,,$$

poiché la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio (alternativamente provare ad usare de L'Hôpital).



c. Poiché l'esponenziale è sempre positivo, si ha che $f(x)\ge 0$ se e solo se $x^2-6x+5\ge 0$ ovvero sse $x\le 1$ oppure $x\ge 5$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x)=(2x-6)e^{2x-3}+2(x^2-6x+5)e^{2x-3}=2(x^2-5x+2)e^{2x-3}\,.$$

Il segno di $f'(x)$ coincide col segno di x^2-5x+2, per cui

$$f'(x)\begin{cases}>0, & \text{se } x<(5-\sqrt{17})/2 \text{ o } x>(5+\sqrt{17})/2,\\ =0, & \text{se } x=(5-\sqrt{17})/2 \text{ oppure } x=(5+\sqrt{17})/2\\ <0, & \text{se } (5-\sqrt{17})/2<x<(5+\sqrt{17})/2.\end{cases}$$

La funzione è dunque decrescente su $](5-\sqrt{17})/2,(5+\sqrt{17})/2[$, crescente sugl'intervalli $]-\infty,(5-\sqrt{17})/2[$ e su $](5+\sqrt{17})/2,+\infty[$, ed ammette un minimo ed un massimo relativo rispettivamente per $x=(5+\sqrt{17})/2$ e per $x=(5-\sqrt{17})/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x)=2\big((2x-5)e^{2x-3}+2(x^2-5x+2)e^{2x-3}\big)=2(2x^2-8x-1)e^{2x-3}\,.$$

Il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $2x^2-8x-1$. La f risulta convessa sugli intervalli $]-\infty,(4-\sqrt{18})/2[$ e $](4+\sqrt{18})/2,+\infty[$, mentre è concava su $](4-\sqrt{18})/2,(4+\sqrt{18})/2[$. In corrispondenza di $(4\pm\sqrt{18})/2$, la funzione ha due punti di flesso. Il grafico qui sopra in basso è un ingrandimento della zona attorno all'origine.

3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. I limiti agli estremi sono:

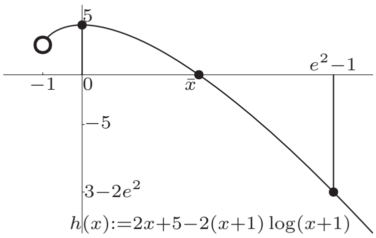
$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \left[\frac{-\infty}{3}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0\,,$$

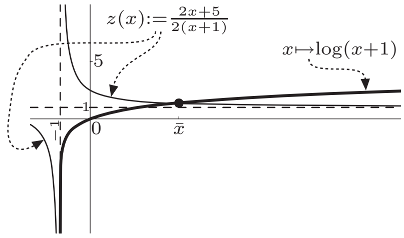
poiché la funzione logaritmo è dominata da ogni polinomio (alternativamente, provare ad usare de L'Hôpital). Per $x > -1$ il denominatore è sempre positivo, per cui $f(x) > 0$ se e solo se $x+1 > 1$ ovvero $x > 0$, mentre $f(x) < 0$ se $-1 < x < 0$. Infine la funzione si annulla per $x = 0$.

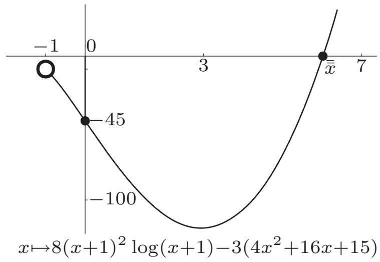
c. Per $x > -1$, la derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\frac{2x+5}{x+1} - 2\log(x+1)}{(2x+5)^2} = \frac{2x+5-2(x+1)\log(x+1)}{(x+1)(2x+5)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo su $\mathcal{D}$, quindi il segno della derivata prima $g'(x)$ coincide con quello del numeratore $h(x) := 2x+5-2(x+1)\log(x+1)$. La disequazione $h(x) \ge 0$ non è risolubile esplicitamente.







d. Osserviamo che poiché $h(0) = 5 > 0$, $h(e^2-1) = 3-2e^2 < 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri (vedi figura sopra a sinistra) assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]0, e^2-1[$ per il quale $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo. Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.

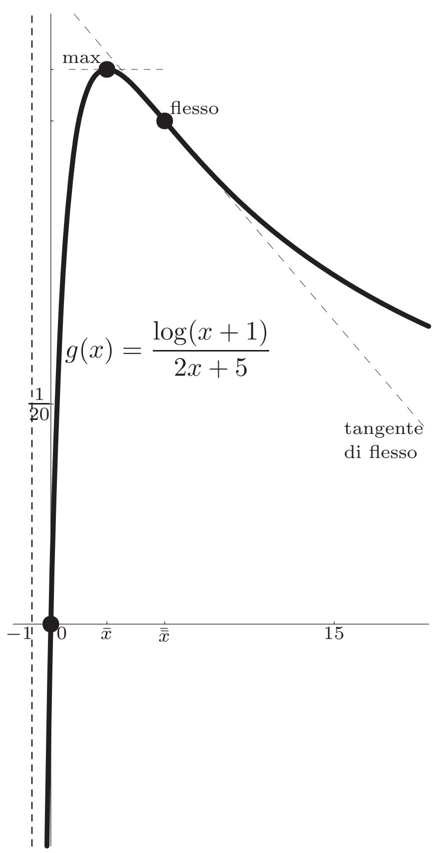
[I metodo]: la disequazione $g'(x) \ge 0$ equivale a $\log(x+1) \le \frac{2x+5}{2(x+1)}$. Poiché la funzione $\log(x+1)$ è strettamente crescente su $]-1,+\infty[$ con $\lim_{x\to -1^+}\log(x+1) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\log(x+1) = +\infty$, e la funzione $z(x) := \frac{2x+5}{2(x+1)}$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo con $\lim_{x\to -1^+} z(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 1$, allora graficamente (figura sopra al centro) si deduce che esiste un unico punto $\bar{x}$ per cui

$$\begin{cases} \log(x+1) < \frac{2x+5}{2(x+1)}, & \text{se } -1 < x < \bar{x}, \\ \log(x+1) = \frac{2x+5}{2(x+1)}, & \text{se } x = \bar{x}, \\ \log(x+1) > \frac{2x+5}{2(x+1)}, & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } -1 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$

In particolare g è crescente su $]-1, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.



[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -2\log(x+1)$, si ha che $h(x)$ è crescente se $-1 < x < 0$ e decrescente per $x > 0$, quindi per il Teorema degli zeri esiste un unico (per la stretta monotonia su $]0, +\infty[$) punto $\bar{x}$ tale che $h(\bar{x}) = 0$. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{1}{(x+1)^2(2x+5)^4}\Big[\big(-2\log(x+1)\big)(x+1)(2x+3)^2 - \\ -(2x+5-2(x+1)\log(x+1))((2x+3)^2+(x+1)\cdot 2(2x+3)2)\Big] = \\ = \frac{8(x+1)^2\log(x+1) - 3(4x^2+16x+15)}{(x+1)^2(2x+5)^3}$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale -45 in $x=0$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri (figura in alto al centro nella pagina precedente) ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.

4. Si spezza in somma:

$$\int \frac{5\arctan x + 2}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx + = \\ = 3\arctan x + \int \arctan x\, d(\arctan x) = 3\arctan x + \frac{1}{2}\arctan^2 x + c,$$

$$\int \frac{x^3\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x}}{3x}\,dx = 2\int x^{-2/3}\,dx - \frac{1}{2}\int x^{5/2}\,dx = \frac{2}{1-2/3}x^{1-2/3} - \frac{1}{2(1+5/2)}x^{1+5/2} + c = \\ = 6\sqrt[3]{x} - \frac{1}{7}x^{7/2} + c, \qquad (x>0),$$

$$\int \frac{4\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen} x\cos x}\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \\ = -\frac{3}{5}\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) + \frac{1}{5}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = -\frac{3}{5}\log|\cos x| + \frac{1}{5}\log|\operatorname{sen} x| + c.$$

5. Per parti due volte:

$$\int 4x(\log x + 1)^2\,dx = \frac{4x^2}{2}(\log x+1)^2 - \frac{4}{2}\int x^2\, 2\frac{\log x + 1}{x}\,dx = \\ = 2x^2(\log x+1)^2 - 4\bigg(\frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\bigg) = x^2\big(2(\log x+1)^2 - 2(\log x+1)+1\big) + c\,.$$

6. Ricordando la relazione $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, e che $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$, mediante la sostituzione $t = \tan x$ ci si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{7\tan x + 1}{1 - 2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{7\tan x + 1}{\frac{1}{\cos^2 x} - 2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{7\tan x + 1}{(1+\tan^2 x) - 2}\,d(\tan x) = \\ = \int \frac{7t+1}{t^2-1}\,dt = \frac{7}{2}\int \frac{2t}{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \\ = \frac{7}{2}\int \frac{1}{t^2-1}\,d(t^2-1) + \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{7}{2}\log|t^2-1| + \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \\ = \frac{7}{2}\log|t^2-1| + \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| + c = \frac{7}{2}\log|\tan^2 x - 1| + \frac{1}{2}\log\Big|\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}\Big| + c$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per ogni x per cui è definita la tangente e tale che $\cos x \neq \pm 1/\sqrt{2}$ (il che equivale a $\tan x \neq \pm 1$).

Alternativamente si poteva notare che

$$\int \frac{7t+1}{t^2-1}\,dt = 4\int \frac{1}{t-1}\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}\,dt = 4\log|t-1| + 3\log|t+1| + c = \\ = 4\log|\tan x - 1| + 3\log|\tan x + 1| + c$$

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica

Compitino del 13 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - 3\log x}{1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 2x}{\log(e+x) - x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \arctan(2x - 5x^2)}{x^2 + 3\operatorname{sen}(1-\cos x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x} - \operatorname{sen} x}{x\cos(2x) - \log(1+x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} + x^2 \operatorname{arcsen}(x^2) - 1}{3x^3 \operatorname{sen}(2x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{e^{x-5}}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \dfrac{\log(x-3)}{2-3x}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{5\arctan x + 2}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{x^3\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x}}{3x}$, (c) $\dfrac{4\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen} x \cos x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $2x(\log x - 3)^2$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito mediante la sostituzione $t = \tan x$ (conviene ricordare la relazione fondamentale tra $\cos^2 x$ e $\tan^2 x$)

$$\int \frac{5\tan x - 2}{1 - 17\cos^2 x}\,dx\,.$$

Compito D

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

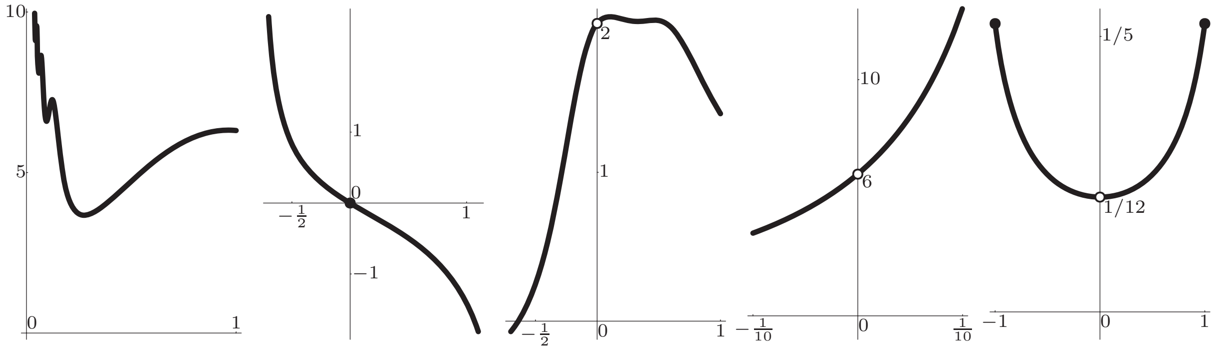
Università degli Studi di Udine　　　　Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica, compito D

Compitino del 13 marzo 2002

Svolgimento



1. a.　**1. b.**　**1. c.**　**1. d.**　**1. e.**

1. a. Il limite richiesto non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - 3\log x}{1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \left[\frac{0-(-\infty)}{1 - 0\cdot\{\text{funz. limitata}\}}\right] = +\infty\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 2x}{\log(e+x) - x^2} = \frac{0}{1-0} = 0\,.$$

c. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \arctan(2x-5x^2)}{x^2 + 3\operatorname{sen}(1-\cos x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - \frac{2-10x}{1+(2x-5x^2)^2}}{2x + 3\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{1+(2x-5x^2)^2}\cdot\frac{(2x-5x^2)^2+5x}{2x+3\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x}\right) = 2\cdot \lim_{x\to 0}\frac{(2x-5x^2)^2+5x}{2x+3\cos(1-\cos x)\operatorname{sen} x} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2(2x-5x^2)(2-10x)+5}{2 - 3\operatorname{sen}(1-\cos x)\operatorname{sen}^2 x + 3\cos(1-\cos x)\cos x} = 2\cdot\frac{0+5}{2-0+3} = 2.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 2.

d. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x} - \operatorname{sen} x}{x\cos(2x) - \log(1+x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} + 3xe^{3x} - \cos x}{\cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{1+x}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6e^{x} + 9xe^{3x} + \operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(2x) - 4x\cos(2x) + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{6}{1} = 6.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 6.

e. Si può applicare de L'Hôpital ripetutamente (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}+x^2\operatorname{arcsen}(x^2)-1}{3x^3\operatorname{sen}(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}}+x^2\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+2x\operatorname{arcsen}(x^2)}{3x^2\operatorname{sen}(2x)+2x^3\cos(2x)} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{3x\operatorname{sen}(2x)+2x^2\cos(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{3\operatorname{sen}(2x)+10x\cos(2x)-4x^2\operatorname{sen}(2x)} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\operatorname{sen}(2x)+10x\cos(2x)-4x^2\operatorname{sen}(2x)}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{16\cos(2x)-28x\operatorname{sen}(2x)-8x^2\cos(2x)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{12}.$$

Alternativamente, si poteva direttamente dividere numeratore e denominatore per x^4 ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}+x^2\operatorname{arcsen}(x^2)-1}{3x^3\operatorname{sen}(2x)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}\left(-\frac{\sqrt{1-x^4}-1}{-x^4}+\frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{12},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

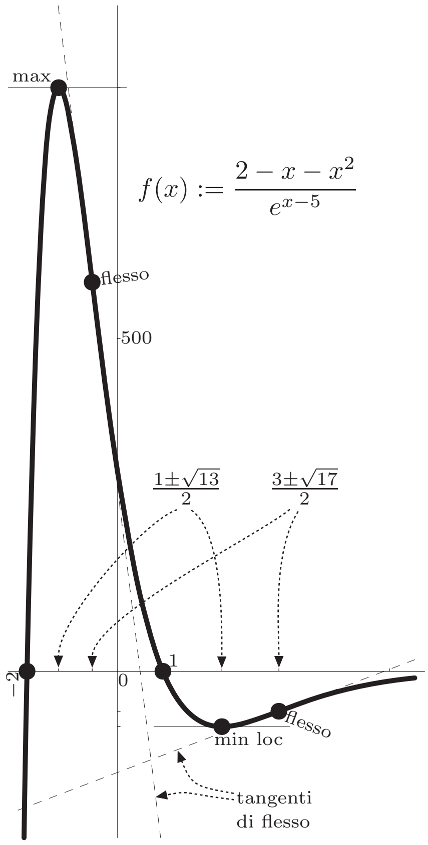
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} z}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{1+z}-1}{z} = \frac{1}{2},$$

che possono essere verificati mediante de L'Hôpital. Si osservi che il terzo limite non è altro che la derivata della funzione $z \mapsto \sqrt{z}$ calcolata in 1. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 1/12.

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai ed è ovunque continua e derivabile. Si osservi che la funzione può essere scritta come $f(x) = (2-x-x^2)e^{5-x}$, una forma sicuramente più comoda da derivare. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

poiché la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio (alternativamente provare ad usare de L'Hôpital).



c. Poiché l'esponenziale è sempre positivo, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $2-x-x^2 \leq 0$ ovvero sse $-2 \leq x \leq 1$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = (-1-2x)e^{5-x} - (2-x-x^2)e^{5-x} = (x^2-x-3)e^{5-x}.$$

Il segno di $f'(x)$ coincide col segno di x^2-x-3, per cui

$$f'(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x < (1-\sqrt{13})/2 \text{ o } x > (1+\sqrt{13})/2, \\ =0, & \text{se } x = (1-\sqrt{13})/2 \text{ oppure } x = (1+\sqrt{13})/2 \\ <0, & \text{se } (1-\sqrt{13})/2 < x < (1+\sqrt{13})/2. \end{cases}$$

La funzione è dunque decrescente su $](1-\sqrt{13})/2, (1+\sqrt{13})/2[$, crescente sugl'intervalli $]-\infty, (1-\sqrt{13})/2[$ e su $](1+\sqrt{13})/2, +\infty[$, ed ammette un minimo ed un massimo relativo rispettivamente per $x = (1+\sqrt{13})/2$ e per $x = (1-\sqrt{13})/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = (2x-1)e^{5-x} - (x^2-x-3)e^{5-x} = -(x^2-3x-2)e^{5-x}.$$

Si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 3x - 2 \leq 0$. La f risulta concava sugli intervalli $]-\infty, (3-\sqrt{17})/2[$ e $](3+\sqrt{17})/2, +\infty[$, mentre è convessa su $](3-\sqrt{17})/2, (3+\sqrt{17})/2[$. In corrispondenza di $(3 \pm \sqrt{17})/2$, la funzione ha due punti di flesso.

3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} =]3, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile. I limiti agli estremi sono:

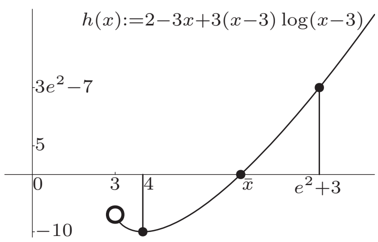
$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \left[\frac{-\infty}{-7}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,,$$

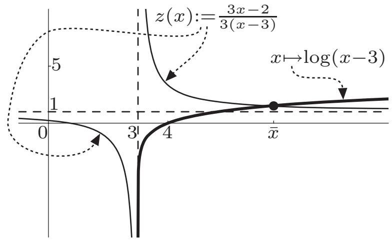
poiché la funzione logaritmo è dominata da ogni polinomio (alternativamente, provare ad usare de L'Hôpital). Per $x > 3$ il denominatore è sempre negativo, per cui $f(x) > 0$ se e solo se $0 < x-3 < 1$ ovvero $3 < x < 4$, mentre $f(x) < 0$ se $4 < x$. Infine la funzione si annulla per $x = 4$.

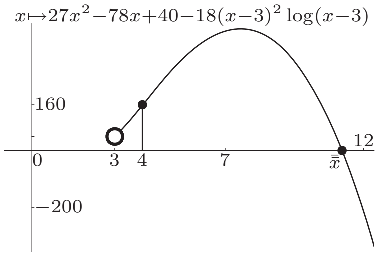
c. Per $x > 3$, la derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\frac{2-3x}{x-3} + 3\log(x-3)}{(2-3x)^2} = \frac{2-3x+3(x-3)\log(x-3)}{(x-3)(3x-2)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo su $\mathcal{D}$, quindi il segno della derivata prima $g'(x)$ coincide con quello del numeratore $h(x) := 2-3x+3(x-3)\log(x-3)$. La disequazione $h(x) \geq 0$ non è risolubile esplicitamente.







d. Osserviamo che poiché $h(4) = -10 < 0$, $h(e^2+3) = 3e^2-7 > 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri (vedi figura sopra a sinistra) assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]4, e^2+3[$ per il quale $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo.

Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.

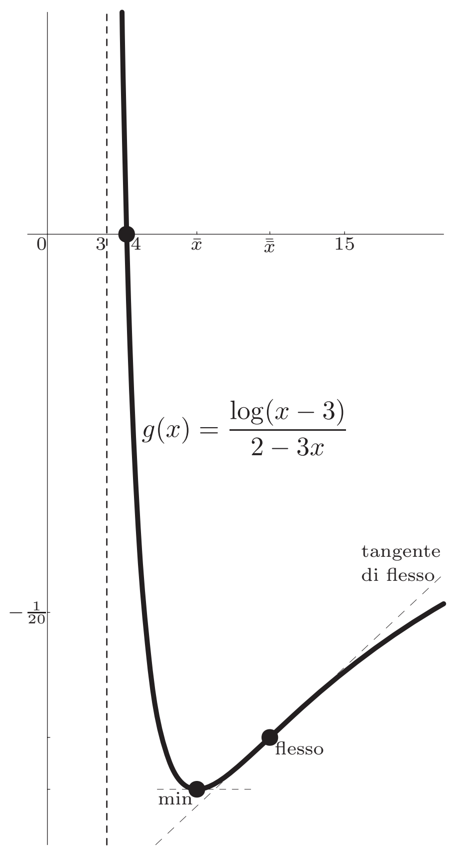
[I metodo]: la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $\log(x-3) \geq \frac{3x-2}{3(x-3)}$. Poiché la funzione $\log(x-3)$ è strettamente crescente su $]3, +\infty[$ con $\lim_{x\to3^+}\log(x-3) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\log(x+1) = +\infty$, e la funzione $z(x) := \frac{3x-2}{3(x-3)}$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo con $\lim_{x\to3^+} z(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 1$, allora graficamente (vedi figura sopra al centro) si deduce che esiste un unico punto $\bar{x}$ per cui

$$\begin{cases} \log(x-3) < \frac{3x-2}{3(x-3)}, & \text{se } 3 < x < \bar{x}, \\ \log(x-3) = \frac{3x-2}{3(x-3)}, & \text{se } x = \bar{x}, \\ \log(x-3) > \frac{3x-2}{3(x-3)}, & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } 3 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ > 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$

In particolare g è decrescente su $]3, \bar{x}[$, crescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un minimo relativo (che risulta anche minimo assoluto) in $x = \bar{x}$.



[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = 3\log(x-3)$, si ha che $h(x)$ è decrescente se $3 < x < 4$ e crescente per $x > 4$, quindi per il Teorema degli zeri (vedi figura in altro a destra alla pagina precedente) esiste un unico (per la stretta monotonia su $]4, +\infty[$) punto $\bar{x}$ tale che $h(\bar{x}) = 0$. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{1}{(x-3)^2(3x-2)^4}\Big[3\log(x-3)(x-3)(3x-2)^2 - \\ - (2-3x+3(x-3)\log(x-3))((3x-2)^2+(x-3)2(3x-2)3)\Big] = \\ = \frac{27x^2-78x+40-18(x-3)^2\log(x-3)}{(x-3)^2(3x-2)^3}$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale 160 in $x = 4$ e tende a $-\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri (vedi figura a destra) ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.

4. Si spezza in somma:

$$\int \frac{5\arctan x + 2}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 5\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx + = \\ = 2\arctan x + 5\int \arctan x\, d(\arctan x) = 2\arctan x + \frac{5}{2}\arctan^2 x + c$$

$$\int \frac{x^3\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{7/3}\,dx - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3(1+7/3)}x^{1+7/3} - \frac{2}{3(1+1/2)}x^{1+1/2} + c = \\ = \frac{1}{10}x^{10/3} - \frac{4}{9}x^{3/2} + c, \qquad (x > 0)$$

$$\int \frac{4\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen} x\cos x}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \\ = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) + \frac{4}{3}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{3}\log|\cos x| + \frac{4}{3}\log|\operatorname{sen} x| + c.$$

5. Per parti due volte:

$$\int 2x(\log x - 3)^2\,dx = \frac{2x^2}{2}(\log x - 3)^2 - \int x^2\, 2\frac{\log x - 3}{x}\,dx = \\ = x^2(\log x - 3)^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}(\log x - 3) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx\right) = \\ = \frac{x^2}{2}\big(2(\log x - 3)^2 - 2(\log x - 3) + 1\big) + c$$

6. Ricordando la relazione $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, e che $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$, mediante la sostituzione $t = \tan x$ ci si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{5\tan x - 2}{1 - 17\cos^2 x}\,dx = \int \frac{5\tan x - 2}{\frac{1}{\cos^2 x} - 17}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{5\tan x - 2}{(1+\tan^2 x) - 17}\,d(\tan x) = \\ = \int \frac{5t-2}{t^2-16}\,dt = \frac{5}{2}\int \frac{2t}{t^2-16}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2-16}\,dt = \\ = \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2-16}\,d(t^2-16) - 2\int \frac{1}{(t-4)(t+4)}\,dt = \frac{5}{2}\log|t^2-16| - \frac{2}{8}\int\left(\frac{1}{t-4} - \frac{1}{t+4}\right)dt = \\ = \frac{5}{2}\log|t^2-16| - \frac{1}{4}\log|t-4| + \frac{1}{4}\log|t+4| + c = \frac{5}{2}\log|\tan^2 x - 16| + \frac{1}{4}\log\left|\frac{\tan x + 4}{\tan x - 4}\right| + c\,.$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per ogni x per cui è definita la tangente e tale che $\cos x \neq \pm 1/\sqrt{17}$ (il che equivale a $\tan x \neq \pm 4$).
Alternativamente si poteva notare che

$$\int \frac{5t-2}{t^2-16}\,dt = \frac{9}{4}\int \frac{1}{t-4}\,dt + \frac{11}{4}\int \frac{1}{t+4}\,dt = \frac{9}{4}\log|t-4| + \frac{11}{4}\log|t+4| + c =$$
$$= \frac{9}{4}\log|\tan x - 4| + \frac{11}{4}\log|\tan x + 4| + c$$