Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 12 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti, usando il Teorema de L'Hôpital ove sembri opportuno

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+\cos(2x)-e^{3x}}{x\,\mathrm{sen}(4x)}$ (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2-2}-2\cos e^{x}}{2-3\cos e^{-x}}$ (c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{sen}\, e^{x}}{\log(1-3/x)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x\,\mathrm{sen}(3x)}{e^{4x^2}-1-(2x)^2}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x}-1-\cos x}{\arctan(\frac{x+2}{2})+2\,\mathrm{arcsen}(3x+x^2)}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{3x^2+6x-9}{x^2+2x+2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x)=\sqrt{x}/(e^{x}+3)$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{2+5x}{1+x^2}$, (b) $\dfrac{2\sqrt{x}-5x^2\sqrt[5]{x}}{x}$, (c) $\dfrac{4\log x+1}{3x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $(1+2x^2)e^{3x}$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\mathrm{sen}\, x\cos x+\cos x}{3-\cos^2 x-3\,\mathrm{sen}\, x}\,dx,$$

mediante la sostituzione $t=\mathrm{sen}\, x$. Conviene ricordare la relazione fondamentale tra seno e coseno.

Compito A

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

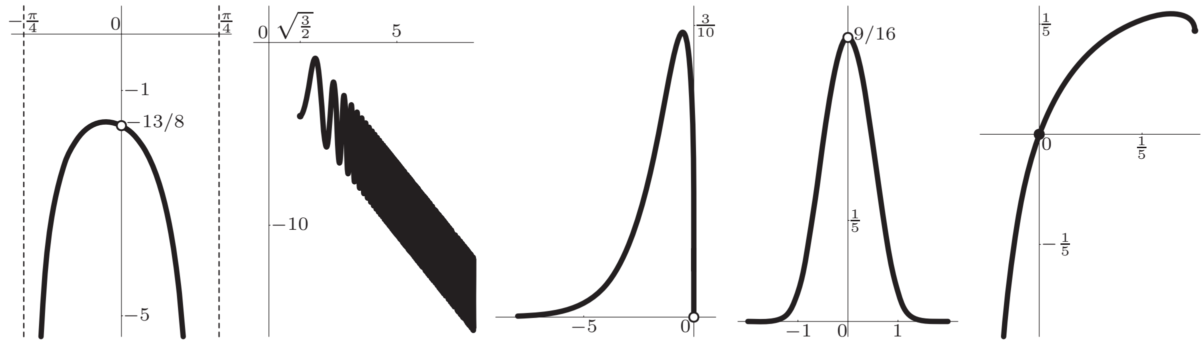
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito A

Compitino del 12 marzo 2002

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+\cos(2x)-e^{3x}}{x\,\mathrm{sen}(4x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3-2\,\mathrm{sen}(2x)-3e^{3x}}{\mathrm{sen}(4x)+4x\cos(4x)} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)-9e^{3x}}{8\cos(4x)-16x\,\mathrm{sen}(4x)} = -\frac{13}{8}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-13/8$. Alternativamente si poteva procedere nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+\cos(2x)-e^{3x}}{x\,\mathrm{sen}(4x)} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{3x+\cos(2x)-e^{3x}}{4x^2}\cdot\frac{4x}{\mathrm{sen}(4x)}\Big) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+\cos(2x)-e^{3x}}{4x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{3-2\,\mathrm{sen}(2x)-3e^{3x}}{2x} =$$

$$= -\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\Big(9\frac{e^{3x}-1}{3x}+4\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x}\Big) = -\frac{1}{8}(9+4) = -\frac{13}{8}.$$

b. Il limite richiesto non è in forma indeterminata: il numeratore, somma di una funzione che tende all'infinito ed una funzione limitata, tende a $+\infty$, il denominatore tende a -1. Quindi il limite richiesto e $-\infty$.

c. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{sen}\, e^x}{\log(1-3/x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x\cos e^x}{\frac{1}{1-3/x}\Big(\frac{3}{x^2}\Big)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-3x}{e^{-x}}\cos e^x\Big) = \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = 0\,.$$

Il limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{e^{-x}} = 0$ è fondamentale (la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio), ma può essere anch'esso calcolato con de L'Hôpital. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 0.

d. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-1-\cos x}{\arctan(\frac{x+2}{2})+2\,\mathrm{arcsen}(3x+x^2)}=\frac{0}{\pi/4+0}=0\,.$$

e. Si può applicare de L'Hôpital quattro volte (forma indeterminata 0/0):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x\,\mathrm{sen}(3x)}{e^{4x^2}-1-(2x)^2} &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x-\mathrm{sen}(3x)-3x\cos(3x)}{8xe^{4x^2}-8x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos(3x)+9x\,\mathrm{sen}(3x)}{e^{4x^2}+8x^2e^{4x^2}-1}\\ &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{27\,\mathrm{sen}(3x)+27x\cos(3x)}{24xe^{4x^2}+64x^3e^{4x^2}}\\ &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{27}{64}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(3x)-3x\,\mathrm{sen}(3x)}{3e^{4x^2}+48x^2e^{4x^2}+64x^4e^{4x^2}}=\frac{27}{64}\cdot\frac{4}{3}=\frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Alternativamente, dopo la prima applicazione del teorema si poteva procedere nel seguente modo: mediante semplici calcoli algebrici si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6x-\mathrm{sen}(3x)-3x\cos(3x)}{8xe^{4x^2}-8x} &= \frac{27}{32}\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{e^{4x^2}-1}\left(\frac{3x-\mathrm{sen}(3x)}{(3x)^3}+\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)\right)=\\ &=\frac{27}{32}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16},\end{aligned}$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{z\to 0}\frac{z-\mathrm{sen}\,z}{z^3}=\frac{1}{6}\,,$$

il terzo dei quali può essere verificato mediante de L'Hôpital. Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 9/16.

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai e quindi, essendo una funzione razionale, è anche ovunque continua e derivabile. Il limite di f a $\pm\infty$ vale 3.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x)\ge 0$ se e solo se $3x^2+6x-9\ge 0$ ovvero sse $x\ge 1$ oppure $x\le -3$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x)=\frac{(6x+6)(x^2+2x+2)-(3x^2+6x-9)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=30\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,.$$

Alternativamente si poteva notare che

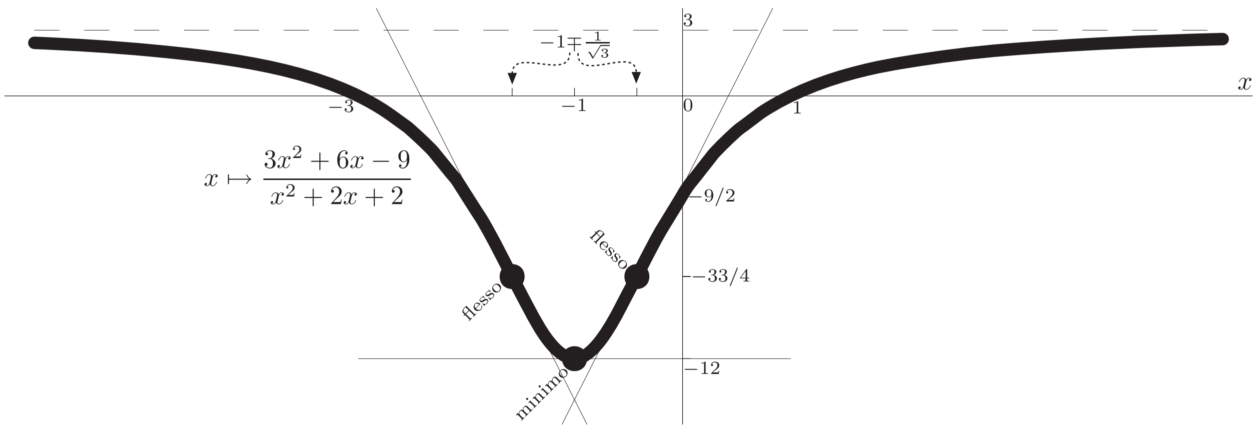
$$f(x)=3-\frac{15}{x^2+2x+2}\,,\quad \text{per cui}\quad f'(x)=15\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}=30\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,.$$

Si ha quindi che $f'(x)\ge 0$ se e solo se $x\ge -1$. La funzione è dunque crescente su $]-1,+\infty[$, decrescente su $]-\infty,-1[$ ed ammette un minimo relativo (ed assoluto) per $x=-1$.

e. La derivata seconda è

$$\begin{aligned}f''(x)&=30\frac{(x^2+2x+2)^2-(x+1)2(x^2+2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4}=\\ &=30\frac{(x^2+2x+2)-(x+1)(4x+4)}{(x^2+2x+2)^3}=-30\frac{3x^2+6x+2}{(x^2+2x+2)^3}.\end{aligned}$$

Si ha $f''(x)\ge 0$ se e solo se $3x^2+6x+2\le 0$. Si ottiene che f è concava sugli intervalli $]-\infty,-1-1/\sqrt{3}[$ e $]-1+1/\sqrt{3},+\infty[$ mentre è convessa su $]-1-1/\sqrt{3},-1+1/\sqrt{3}[$. In corrispondenza di $-1\pm 1/\sqrt{3}$, la funzione ha due punti di flesso.



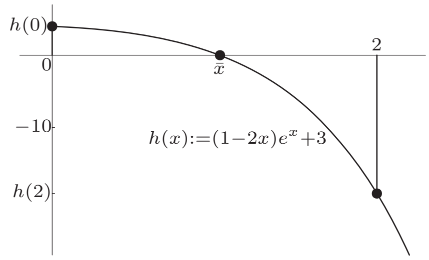
3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = [0, +\infty[$. La funzione è ivi continua, mentre risulta derivabile solamente su $]0, +\infty[$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (l'esponenziale domina qualsiasi potenza di x). La funzione si annulla in $x = 0$ ed è strettamente positiva altrove.

c. Per $x > 0$, la derivata prima è

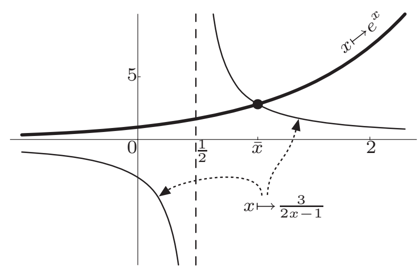
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x+3) - \sqrt{x}e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(1-2x)e^x+3}{2\sqrt{x}(e^x+3)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende da quello del numeratore, ovvero $g'(x) \geq 0$ se e solo se $h(x) := (1-2x)e^x + 3 \geq 0$, disequazione non risolubile simbolicamente.

d. Osserviamo che poiché $h(0) = 4 > 0$, $h(2) = 3 - 3e^2 < 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]0, 2[$ per cui $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo. Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.



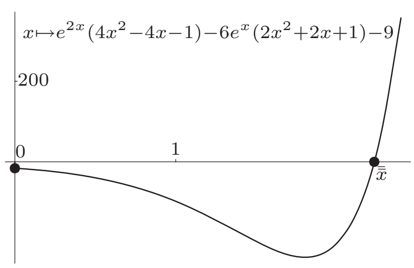
[I metodo]: risulta chiaro che se $x \in]0, 1/2]$ allora $h(x) = (1 - 2x)e^x + 3 \geq 3 > 0$ e quindi g' è positiva (dunque g è strettamente crescente). Per $x > 1/2$ la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $e^x \leq 3/(2x-1)$. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente su $]1/2, +\infty[$ e la funzione $z(x) = 3/(2x-1)$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo, e tende a $+\infty$ se $x \to 1/2^-$ e tende a 0 all'infinito, allora graficamente si deduce che esiste un unico punto $\bar{x} > 1/2$ per cui



$$\begin{cases} e^x < 3/(2x-1), & \text{se } 1/2 < x < \bar{x}, \\ e^x = 3/(2x-1), & \text{se } x = \bar{x}, \\ e^x > 3/(2x-1), & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$



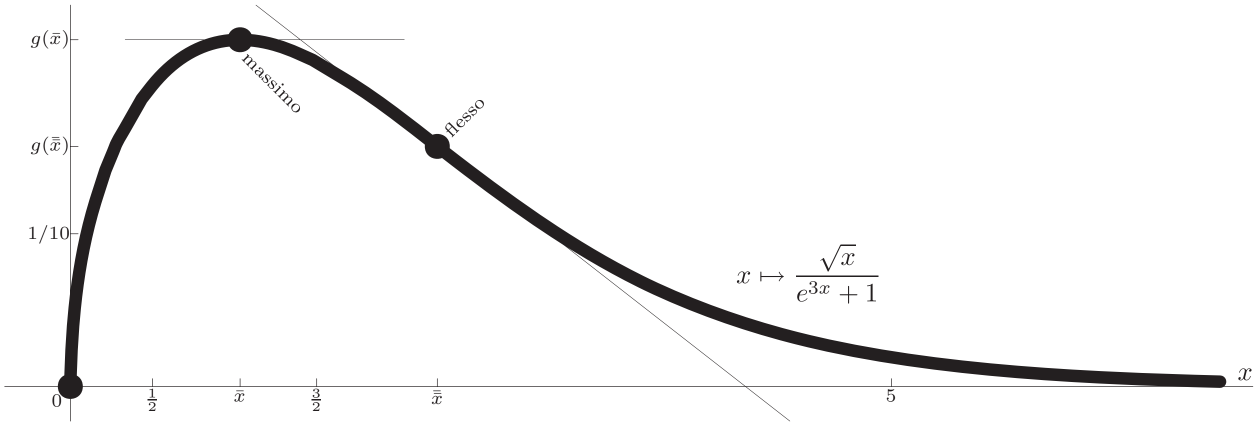
In particolare g è crescente su $]0, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.

[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -(1+2x)e^x < 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $h(x)$ è ivi strettamente decrescente e quindi il punto $\bar{x}$ trovato sopra è unico. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{-e^x(1+2x)\sqrt{x}(e^x+3)^2 - ((1-2x)e^x+3)\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x+3)^2 + \sqrt{x}2(e^x+3)e^x\Big)}{2x(e^x+3)^4} = \\
&= -\frac{e^x(1+2x)2x(e^x+3) + ((1-2x)e^x+3)\big((e^x+3)+4xe^x\big)}{4x\sqrt{x}(e^x+3)^3} = \\
&= \frac{e^{2x}(4x^2-4x-1) - 6e^x(2x^2+2x+1) - 9}{4x\sqrt{x}(e^x+3)^3}
\end{aligned}
$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale -16 in $x=0$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.



4. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2+5x}{1+x^2}\,dx &= \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) + 2\arctan x = \frac{5}{2}\log(1+x^2) + 2\arctan x + c\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2\sqrt{x} - 5x^2\sqrt[5]{x}}{x}\,dx &= 2\int x^{-1/2}\,dx - 5\int x^{6/5}\,dx = \frac{2}{1-1/2}x^{1-1/2} - \frac{5}{1+6/5}x^{1+6/5} + c = \\
&= 4\sqrt{x} - \frac{25}{11}x^{11/5} + c, \qquad (x>0)\,;
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{4\log x + 1}{3x}\,dx = \frac{4}{3}\int \log x\, d(\log x) + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{3}\log^2 x + \frac{1}{3}\log x + c, \qquad (x>0)
$$

5. Integriamo per parti due volte:

$$
\begin{aligned}
\int (1+2x^2)e^{3x}\,dx &= (1+2x^2)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}4x\,dx = \\
&= (1+2x^2)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{4}{3}\left(x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\right) = \frac{e^{3x}}{27}\big(9(1+2x^2) - 12x + 4\big) + c
\end{aligned}
$$

6. Ricordando la relazione $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, e che $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$, mediante la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ ci

si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x + \cos x}{3 - \cos^2 x - 3 \operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{3 - (1 - \operatorname{sen}^2 x) - 3 \operatorname{sen} x}\, d(\operatorname{sen} x) =$$
$$= \int \frac{t+1}{t^2 - 3t + 2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t-3}{t^2-3t+2}\, dt + \frac{5}{2} \int \frac{1}{t^2-3t+2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-3t+2}\, d(t^2-3t+2) + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \log |t^2 - 3t + 2| + \frac{5}{2} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \log |t^2 - 3t + 2| + \frac{5}{2} \log |t-2| - \frac{5}{2} \log |t-1| + c =$$
$$= \frac{1}{2} \log |\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2| + \frac{5}{2} \log |\operatorname{sen} x - 2| - \frac{5}{2} \log |\operatorname{sen} x - 1| + c$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per ogni x tale che $\operatorname{sen} x \neq 1$.
Alternativamente si poteva notare che

$$\int \frac{t+1}{t^2-3t+2}\, dt = 3 \int \frac{1}{t-2}\, dt - 2 \int \frac{1}{t-1}\, dt = 3 \log |t-2| - 2 \log |t-1| + c =$$
$$= 3 \log |\operatorname{sen} x - 2| - 2 \log |\operatorname{sen} x - 1| + c$$

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 12 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti, usando il Teorema de L'Hôpital ove sembri opportuno

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(2x) - 2x^2}{e^{3x^2} - 1 - 3x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3e^x + \cos(5x) - 4 - 3x}{x\,\mathrm{sen}(2x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+3x^2} - 2\,\mathrm{sen}\, e^x}{1 - 3\cos e^{-x}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos e^x - 1}{\log(1 + 7/x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x - 3x^2}{\arctan(\frac{1}{x+1}) - \mathrm{arcsen}(5x)}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2 + 2x - 6x^2}{1 - x + 3x^2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \sqrt{x}/(e^{2x} + 2)$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{3x+4}{1+x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{4\sqrt[3]{x} + x^2\ \sqrt[2]{x}}{3x}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{3\log x + 2}{4x}.$$

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $(3 + 5x^2)e^{2x}$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + 3\cos x}{\mathrm{sen}\,x - 1 - \cos^2 x}\,dx$$

mediante la sostituzione $t = \mathrm{sen}\,x$. Conviene ricordare la relazione fondamentale tra seno e coseno.

Compito B

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

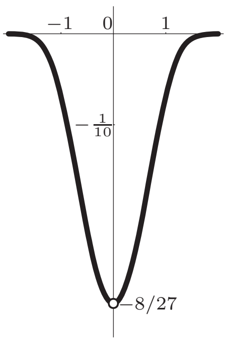
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

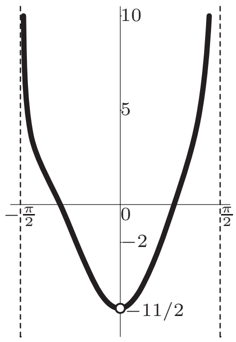
Analisi Matematica, compito B

Compitino del 16 marzo 2001

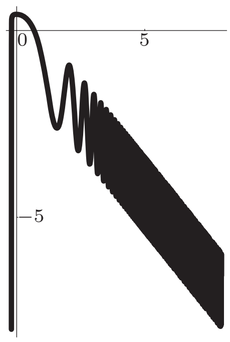
Svolgimento



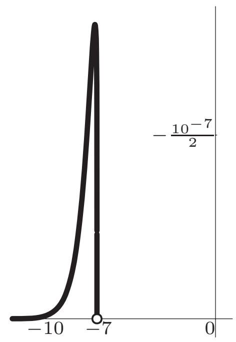
1. a.



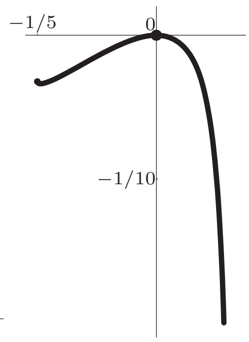
1. b.



1. c.



1. d.



1. e.

1.a. Si può applicare de L'Hôpital quattro volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}(2x)-2x^2}{e^{3x^2}-1-3x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x)+2x\cos(2x)-4x}{6xe^{3x^2}-6x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(2x)-4x\,\mathrm{sen}(2x)-4}{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}-1}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-3\,\mathrm{sen}(2x)-2x\cos(2x)}{18xe^{3x^2}+36x^3e^{3x^2}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{27}\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos(2x)+4x\,\mathrm{sen}(2x)}{e^{3x^2}+12x^2e^{3x^2}+12x^4e^{3x^2}} = \frac{1}{27}\cdot\frac{-8}{1} = -\frac{8}{27}.$$

Alternativamente, dopo la prima applicazione del teorema si poteva procedere nel seguente modo: mediante semplici calcoli algebrici si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x)+2x\cos(2x)-4x}{6xe^{3x^2}-6x} = -\frac{2^3}{6\cdot 3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^2}{e^{3x^2}-1}\left(\frac{2x-\mathrm{sen}(2x)}{(2x)^3}+\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{4}{9}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{27},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{z-\mathrm{sen}\,z}{z^3}=\frac{1}{6}\,,$$

il terzo dei quali può essere verificato mediante de L'Hôpital. Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-8/27$.

b. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+\cos(5x)-4-3x}{x\,\mathrm{sen}(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^x-5\,\mathrm{sen}(5x)-3}{\mathrm{sen}(2x)+2x\cos(2x)}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^x-25\cos(2x)}{4\cos(2x)-4x\,\mathrm{sen}(2x)} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-11/2$. Alternativamente si poteva procedere nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+\cos(5x)-4-3x}{x\,\mathrm{sen}(2x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3e^x+\cos(5x)-4-3x}{2x^2}\,\frac{2x}{\mathrm{sen}(2x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3e^x+\cos(5x)-4-3x}{2x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^x-5\,\mathrm{sen}(5x)-3}{4x} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{e^x-1}{x}-25\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5x}\right) = \frac{1}{4}\cdot(3-25) = -\frac{11}{2}.$$

c. Il limite richiesto non è in forma indeterminata: il numeratore, somma di una funzione che tende all'infinito ed una funzione limitata, tende a $+\infty$, il denominatore tende a -2. Quindi il limite richiesto è $-\infty$.

d. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos e^x-1}{\log(1+7/x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^x\,\mathrm{sen}\,e^x}{\frac{1}{1+7/x}\left(-\frac{7}{x^2}\right)} = \frac{1}{7}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+7x}{e^{-x}}\,\mathrm{sen}\,e^x\right) = \frac{1}{7}\cdot 0\cdot 0 = 0\,.$$

Il limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+7x}{e^{-x}} = 0$ è fondamentale (la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio), ma può essere anch'esso calcolato con de L'Hôpital. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 0.

e. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x-3x^2}{\arctan(\frac{1}{x+1})-\mathrm{arcsen}(5x)} = \frac{0}{\pi/4-0} = 0\,.$$

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai e quindi, essendo una funzione razionale, è anche ovunque continua e derivabile. Il limite di f a $\pm\infty$ vale -2.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x)\geq 0$ se e solo se $6x^2-2x-2\leq 0$ ovvero sse $\frac{1-\sqrt{13}}{6}\leq x\leq\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(2-12x)(1-x+3x^2)-(2+2x-6x^2)(6x-1)}{(3x^2-x+1)^2} = 4\frac{1-6x}{(3x^2-x+1)^2}\,.$$

Alternativamente si poteva notare che

$$f(x) = -2+\frac{4}{3x^2-x+1} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = -\frac{4}{(3x^2-x+1)^2}(6x-1)\,.$$

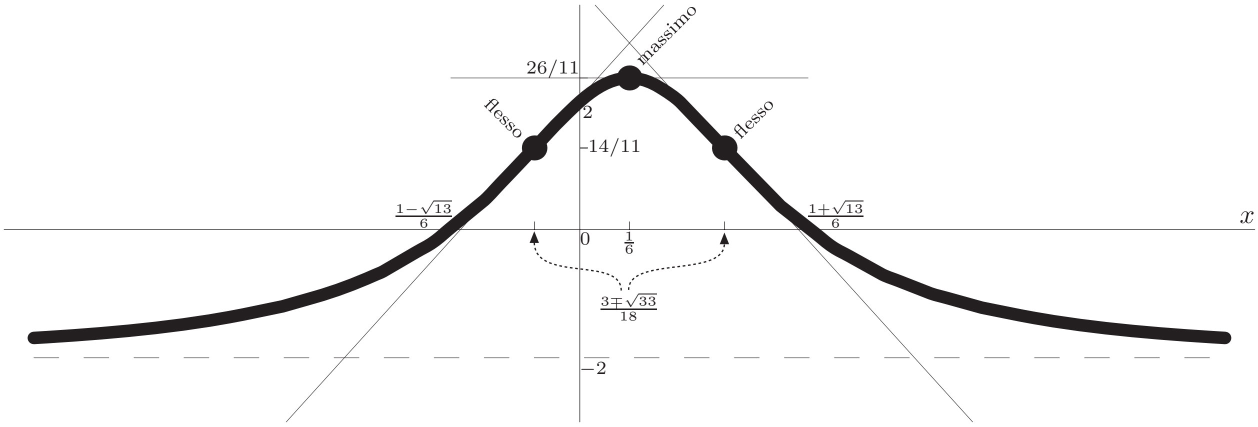
Si ha quindi che $f'(x)\geq 0$ se e solo se $x\leq 1/6$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty,1/6[$, decrescente su $]1/6,+\infty[$ ed ammette un massimo relativo (ed assoluto) per $x=1/6$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{-6(3x^2-x+1)^2-(1-6x)2(3x^2-x+1)(6x-1)}{(3x^2-x+1)^4} =$$

$$= 8\frac{-3(3x^2-x+1)+(6x-1)^2}{(3x^2-x+1)^3} = 8\frac{27x^2-9x-2}{(3x^2-x+1)^3}.$$

Si ha $f''(x)\geq 0$ se e solo se $27x^2-9x-2\geq 0$. Si ottiene che f è convessa sugli intervalli $]-\infty,1/6-\sqrt{33}/18[$ e $]1/6+\sqrt{33}/18,+\infty[$ mentre è concava su $]1/6-\sqrt{33}/18,1/6+\sqrt{33}/18[$. In corrispondenza di $1/6\pm\sqrt{33}/18$, la funzione ha due punti di flesso.



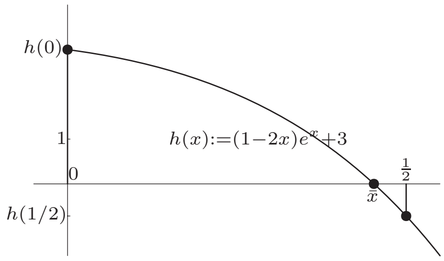
3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = [0, +\infty[$. La funzione è ivi continua, mentre risulta derivabile solamente su $]0, +\infty[$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (l'esponenziale domina qualsiasi potenza di x). La funzione si annulla in $x = 0$ ed è strettamente positiva altrove.

c. Per $x > 0$, la derivata prima è

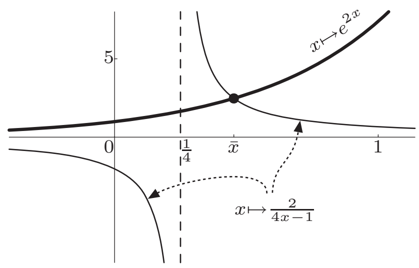
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{2x}+2) - \sqrt{x}\,2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} = \frac{(1-4x)e^{2x}+2}{2\sqrt{x}(e^{2x}+2)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende da quello del numeratore, ovvero $g'(x) \geq 0$ se e solo se $h(x) := (1-4x)e^{2x} + 2 \geq 0$, disequazione non risolubile simbolicamente.

d. Osserviamo che poiché $h(0) = 3 > 0$, $h(1/2) = 2 - e < 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]0, 1/2[$ per cui $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo. Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.



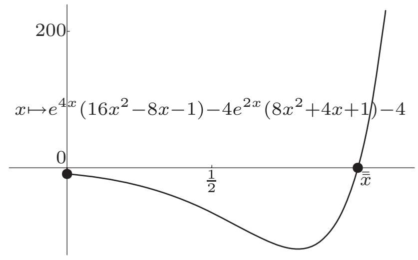
[I metodo]: risulta chiaro che se $x \in]0, 1/4]$ allora $h(x) = (1-4x)e^{2x} + 2 \geq 2 > 0$ e quindi g' è positiva (dunque g è strettamente crescente). Per $x > 1/4$ la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $e^{2x} \leq 2/(4x-1)$. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente su $]1/4, +\infty[$ e la funzione $z(x) = 2/(4x-1)$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo, e tende a $+\infty$ se $x \to 1/4^-$ e tende a 0 all'infinito, allora graficamente si deduce che esiste un unico punto $\bar{x} > 1/4$ per cui



$$\begin{cases} e^{2x} < 2/(4x-1), & \text{se } 1/4 < x < \bar{x}, \\ e^{2x} = 2/(4x-1), & \text{se } x = \bar{x}, \\ e^{2x} > 2/(4x-1), & \text{se } x > \bar{x} \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$



In particolare g è crescente su $]0, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.

[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -2(1+4x)e^{2x} < 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $h(x)$ è ivi strettamente decrescente e quindi il punto $\bar{x}$ trovato sopra è unico. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

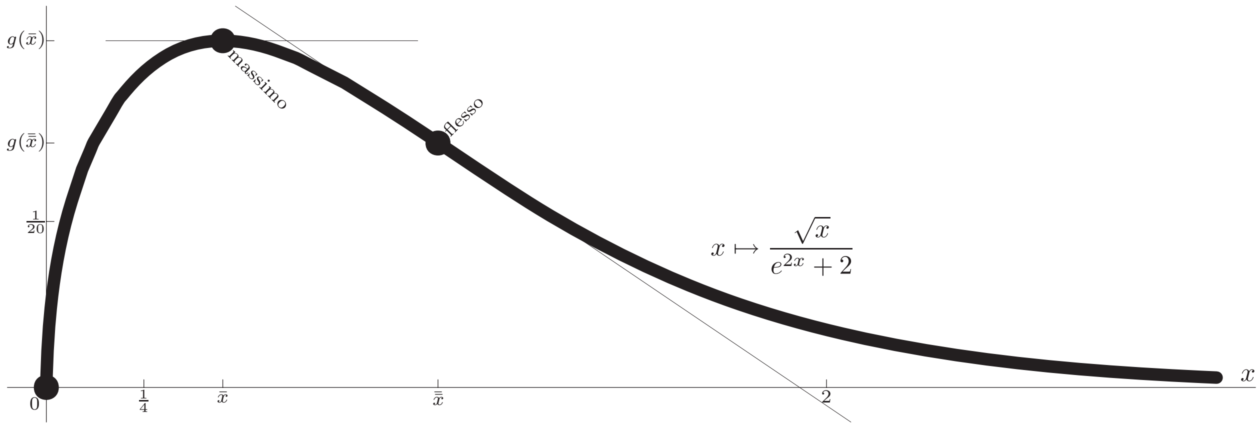
e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2e^{2x}(1+4x)\sqrt{x}(e^{2x}+2)^2 - ((1-4x)e^{2x}+2)\Big(\frac{(e^{2x}+2)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2(e^{2x}+2)2e^{2x}\Big)}{2x(e^{2x}+2)^4} =$$

$$= -\frac{e^{2x}(1+4x)4x(e^{2x}+2) + ((1-4x)e^{2x}+2)\big((e^{2x}+2)+8xe^{2x}\big)}{4x\sqrt{x}(e^{2x}+2)^3} =$$

$$= \frac{e^{4x}(16x^2-8x-1) - 4e^{2x}(8x^2+4x+1) - 4}{4x\sqrt{x}(e^{2x}+2)^3}$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale -9 in $x=0$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.



4. Si ha

$$\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) + 4\arctan x = \frac{3}{2}\log(1+x^2) + 4\arctan x + c\,;$$

$$\int \frac{4\sqrt[3]{x} + x^2\sqrt[2]{x}}{3x}\,dx = \frac{4}{3}\int x^{-2/3}\,dx + \frac{1}{3}\int x^{3/2}\,dx = \frac{4}{3(1-2/3)}x^{1-2/3} + \frac{1}{3(1+3/2)}x^{1+3/2} + c =$$

$$= 4\sqrt[3]{x} + \frac{2}{15}x^{5/2} + c, \qquad (x>0)\,;$$

$$\int \frac{3\log x + 2}{4x}\,dx = \frac{3}{4}\int \log x\, d(\log x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{8}\log^2 x + \frac{1}{2}\log x + c, \qquad (x>0)\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

$$\int (3+5x^2)e^{2x}\,dx = (3+5x^2)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}10x\,dx =$$

$$= (3+5x^2)\frac{e^{2x}}{2} - 5\Big(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\Big) = \frac{e^{2x}}{4}\big(2(3+5x^2) - 10x + 5\big) + c$$

6. Ricordando la relazione $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, e che $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$, mediante la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ ci

si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x + 3\cos x}{\operatorname{sen} x - 1 - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x + 3}{\operatorname{sen} x - 1 - (1 - \operatorname{sen}^2 x)}\, d(\operatorname{sen} x) = \\
&= \int \frac{2t+3}{t^2+t-2}\, dt = \int \frac{2t+1}{t^2+t-2}\, dt + 2\int \frac{1}{t^2+t-2}\, dt = \\
&= \int \frac{1}{t^2+t-2}\, d(t^2+t-2) + 2\int \frac{1}{(t-1)(t+2)}\, dt = \\
&= \log|t^2+t-2| + \frac{2}{3}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \\
&= \log|t^2+t-2| + \frac{2}{3}\log|t-1| - \frac{2}{3}\log|t+2| + c = \\
&= \log|\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2| + \frac{2}{3}\log|\operatorname{sen} x - 1| - \frac{2}{3}\log|\operatorname{sen} x + 2| + c
\end{aligned}$$

Per concludere, si noti che tale formula vale solamente su intervalli dove la funzione integranda è definita e continua ovvero per cui x è tale che $\operatorname{sen} x \neq 1$.
Alternativamente si poteva notare che

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t+3}{t^2+t-2}\, dt &= \frac{5}{3}\int \frac{1}{t-1}\, dt + \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+2}\, dt = \frac{5}{3}\log|t-1| + \frac{1}{3}\log|t+2| + c = \\
&= \frac{5}{3}\log|\operatorname{sen} x - 1| + \frac{1}{3}\log|\operatorname{sen} x + 2| + c
\end{aligned}$$

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 12 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti, usando il Teorema de L'Hôpital ove sembri opportuno

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+5}+\operatorname{sen} e^x}{3-2\cos e^{-x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x\operatorname{sen}(3x)}{e^{2x^2}-1-2x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\cos e^x}{\log(1+5/x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(3x)-2x}{x\operatorname{sen}(5x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+\operatorname{sen} x}{\arctan(x^2+x)-\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2})}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+6x+5}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x)=\sqrt{x}/(e^{3x}+1)$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{1-3x}{1+x^2}$, (b) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}{3x^2}$, (c) $\dfrac{2\log x-1}{5x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $(2-3x^2)e^{2x}$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int\frac{2\operatorname{sen} x\cos x-\cos x}{7-\cos^2 x-5\operatorname{sen} x}\,dx$$

mediante la sostituzione $t=\operatorname{sen} x$. Conviene ricordare la relazione fondamentale tra seno e coseno.

Compito C

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

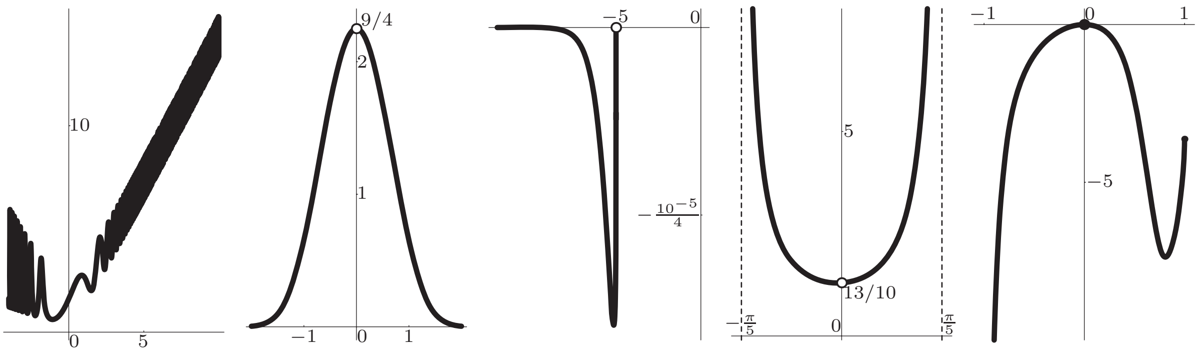
Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito C

Compitino del 16 marzo 2001

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Il limite richiesto non è in forma indeterminata: il numeratore, somma di una funzione che tende all'infinito ed una funzione limitata, tende a $+\infty$, il denominatore tende a 1. Quindi il limite richiesto e $+\infty$.

b. Si può applicare de L'Hôpital quattro volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2 - x\,\mathrm{sen}(3x)}{e^{2x^2}-1-2x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x-\mathrm{sen}(3x)-3x\cos(3x)}{4xe^{2x^2}-4x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos(3x)+9x\,\mathrm{sen}(3x)}{e^{2x^2}+4x^2e^{2x^2}-1}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{9\,\mathrm{sen}(3x)+9x\cos(3x)}{12xe^{2x^2}+16x^3e^{2x^2}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{27}{16}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(3x)-3x\,\mathrm{sen}(3x)}{3e^{2x^2}+24x^2e^{2x^2}+16x^4e^{2x^2}} = \frac{27}{16}\cdot\frac{4}{3}=\frac{9}{4}.$$

Alternativamente, dopo la prima applicazione del teorema si poteva procedere nel seguente modo: mediante semplici calcoli algebrici si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\mathrm{sen}(3x)-3x\cos(3x)}{4xe^{2x^2}-4x} = \frac{3^3}{4\cdot 2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x^2}{e^{2x^2}-1}\left(\frac{3x-\mathrm{sen}(3x)}{(3x)^3}+\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{27}{8}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{z-\mathrm{sen}\,z}{z^3}=\frac{1}{6},$$

il terzo dei quali può essere verificato mediante de L'Hôpital. Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 9/4.

c. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\cos e^x}{\log(1+5/x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\,\mathrm{sen}\,e^x}{\frac{1}{1+5/x}\left(-\frac{5}{x^2}\right)} = -\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5x}{e^{-x}}\,\mathrm{sen}\,e^x\right) = -\frac{1}{5}\cdot 0\cdot 0 = 0\,.$$

Il limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x}{e^{-x}}=0$ è fondamentale (la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio), ma può essere anch'esso calcolato con de L'Hôpital. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 0.

d. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(3x)-2x}{x\,\mathrm{sen}(5x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+3\,\mathrm{sen}(3x)-2}{\mathrm{sen}(5x)+5x\cos(5x)}$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4e^{x}+9\cos(3x)}{10\cos(5x)-25x\,\mathrm{sen}(5x)} = \frac{13}{10}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 13/10. Alternativamente si poteva procedere nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(3x)-2x}{x\,\mathrm{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{e^{2x}-\cos(3x)-2x}{5x^2}\cdot\frac{5x}{\mathrm{sen}(5x)}\Big) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(3x)-2x}{5x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+3\,\mathrm{sen}(3x)-2}{10x} =$$
$$= \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\Big(4\frac{e^{2x}-1}{2x}+9\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\Big) = \frac{4+9}{10}.$$

e. Il limite non è in forma indeterminata:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\mathrm{sen}\,x}{\arctan(x^2+x)-\mathrm{arcsen}(\frac{x+1}{2})} = \frac{0}{0-\pi/6} = 0.$$

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai e quindi, essendo una funzione razionale, è anche ovunque continua e derivabile. Il limite di f a $\pm\infty$ vale $1/2$.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x)\ge 0$ se e solo se $x^2+3x+2\ge 0$ ovvero sse $x\le -2$ oppure $x\ge -1$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x^2+6x+5)-(x^2+3x+2)(4x+6)}{(2x^2+6x+5)^2} = \frac{2x+3}{(2x^2+6x+5)^2}\,.$$

Alternativamente si poteva notare che

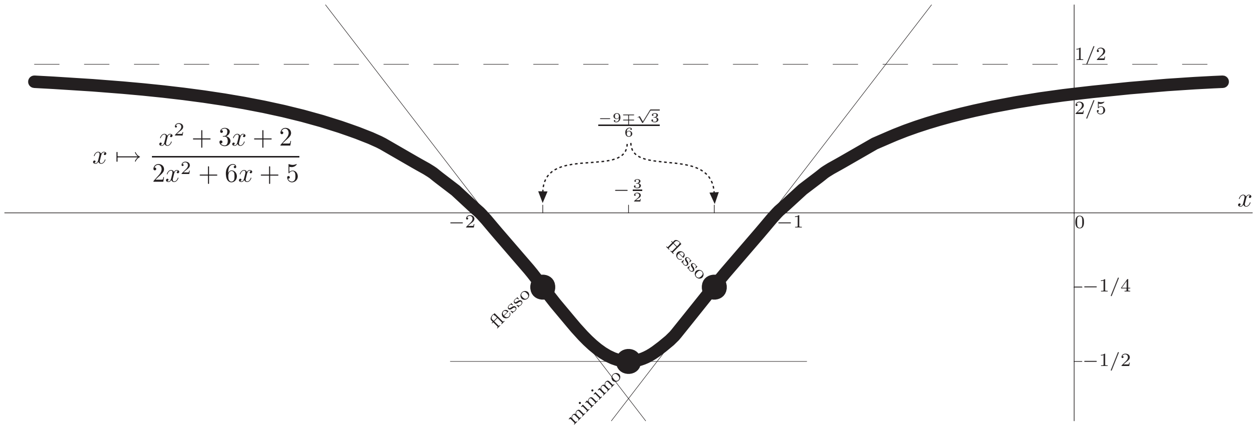
$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2x^2+6x+5}\Big) \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2x^2+6x+5)^2}(4x+6)\,.$$

Si ha quindi che $f'(x)\ge 0$ se e solo se $x\ge -3/2$. La funzione è dunque crescente su $]-3/2,+\infty[$, decrescente su $]-\infty,-3/2[$ ed ammette un minimo relativo (ed assoluto) per $x=-3/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(2x^2+6x+5)^2-(2x+3)2(2x^2+6x+5)(4x+6)}{(2x^2+6x+5)^4} =$$
$$= 2\frac{(2x^2+6x+5)-2(2x+3)^2}{(2x^2+6x+5)^3} = -2\frac{6x^2+18x+13}{(2x^2+6x+5)^3}.$$

Si ha $f''(x)\ge 0$ se e solo se $6x^2+18x+13\le 0$. Si ottiene che f è concava sugli intervalli $]-\infty,-3/2-\sqrt{3}/6[$ e $]-3/2+\sqrt{3}/6,+\infty[$ mentre è convessa su $]-3/2-\sqrt{3}/6,-3/2+\sqrt{3}/6[$. In corrispondenza di $-3/2\pm\sqrt{3}/6$, la funzione ha due punti di flesso.



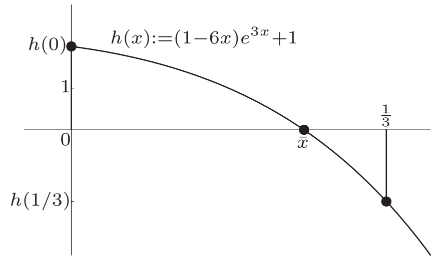
3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = [0, +\infty[$. La funzione è ivi continua, mentre risulta derivabile solamente su $]0, +\infty[$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (l'esponenziale domina qualsiasi potenza di x). La funzione si annulla in $x = 0$ ed è strettamente positiva altrove.

c. Per $x > 0$, la derivata prima è

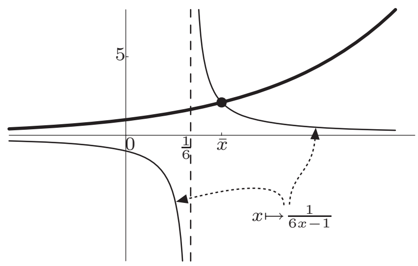
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{3x}+1) - \sqrt{x}\,3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} = \frac{(1-6x)e^{3x}+1}{2\sqrt{x}(e^{3x}+1)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende da quello del numeratore, ovvero $g'(x) \geq 0$ se e solo se $h(x) := (1-6x)e^{3x} + 1 \geq 0$, disequazione non risolubile simbolicamente.

d. Osserviamo che poiché $h(0) = 2 > 0$, $h(1/3) = 1 - e < 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]0, 1/3[$ per cui $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo. Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.



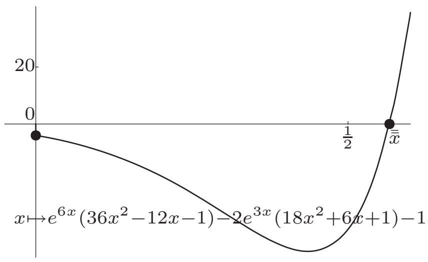
[I metodo]: risulta chiaro che se $x \in]0, 1/6]$ allora $h(x) = (1-6x)e^{3x} + 1 \geq 1 > 0$ e quindi g' è positiva (dunque g è strettamente crescente). Per $x > 1/6$ la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $e^{3x} \leq 1/(6x-1)$. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente su $]1/6, +\infty[$ e la funzione $z(x) = 1/(6x-1)$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo, e tende a $+\infty$ se $x \to 1/6^-$ e tende a 0 all'infinito, allora graficamente si deduce che esiste un unico punto $\bar{x} > 1/6$ per cui



$$\begin{cases} e^{3x} < 1/(6x-1), & \text{se } 1/6 < x < \bar{x}, \\ e^{3x} = 1/(6x-1), & \text{se } x = \bar{x}, \\ e^{3x} > 1/(6x-1), & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$



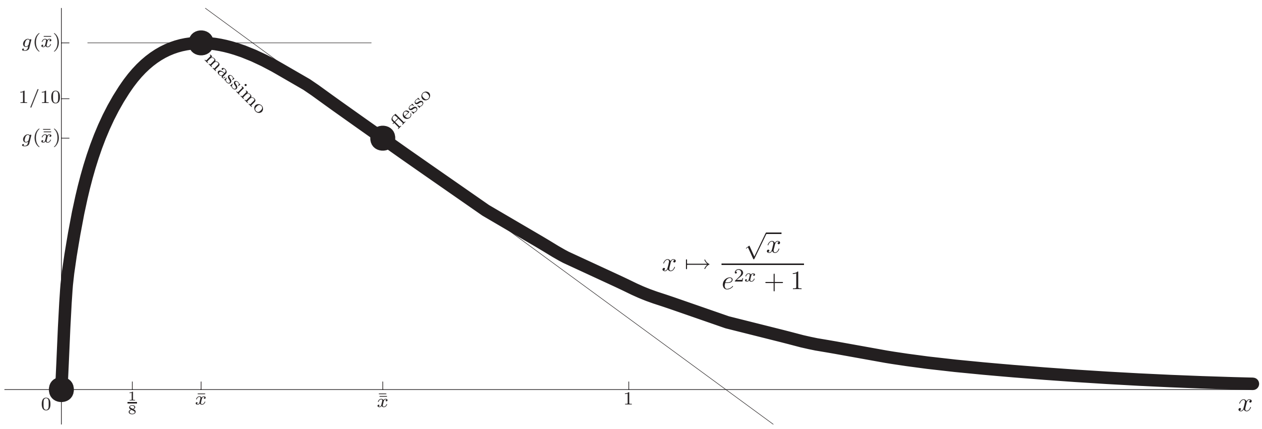
In particolare g è crescente su $]0, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.

[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -3(1+6x)e^{3x} < 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $h(x)$ è ivi strettamente decrescente e quindi il punto $\bar{x}$ trovato sopra è unico. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

e. La derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{-3e^{3x}(1+6x)\sqrt{x}(e^{3x}+1)^2 - ((1-6x)e^{3x}+1)\Big(\frac{(e^{3x}+1)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2(e^{3x}+1)3e^{3x}\Big)}{2x(e^{3x}+1)^4} = \\
&= -\frac{e^{3x}(1+6x)6x(e^{3x}+1) + ((1-6x)e^{3x}+1)\big((e^{3x}+1)+12xe^{3x}\big)}{4x\sqrt{x}(e^{3x}+1)^3} = \\
&= \frac{e^{6x}(36x^2-12x-1) - 2e^{3x}(18x^2+6x+1) - 1}{4x\sqrt{x}(e^{3x}+1)^3}
\end{aligned}
$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale -4 in $x=0$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.



4. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-3x}{1+x^2}\,dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) + \arctan x = -\frac{3}{2}\log(1+x^2) + \arctan x + c\,; \\
\int \frac{x\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}}{3x^2}\,dx &= \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx - \frac{2}{3}\int x^{-3/2}\,dx = \frac{1}{3(1-2/3)}x^{1-2/3} - \frac{2}{3(1-3/2)}x^{1-3/2} + c = \\
&= \sqrt[3]{x} + \frac{4}{3\sqrt{x}} + c, \qquad (x>0)\,; \\
\int \frac{2\log x - 1}{5x}\,dx &= \frac{2}{5}\int \log x\, d(\log x) - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{5}\log^2 x - \frac{1}{5}\log x + c, \qquad (x>0)\,.
\end{aligned}
$$

5. Integriamo per parti due volte:

$$
\begin{aligned}
\int (2-3x^2)e^{2x}\,dx &= (2-3x^2)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-6x)\,dx = \\
&= (2-3x^2)\frac{e^{2x}}{2} + 3\left(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right) = \frac{e^{2x}}{4}\big(2(2-3x^2) + 6x - 3\big) + c
\end{aligned}
$$

6. Ricordando la relazione $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, e che $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$, mediante la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ ci

si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{7 - \cos^2 x - 5 \operatorname{sen} x}\, dx &= \int \frac{2\operatorname{sen} x - 1}{7 - (1 - \operatorname{sen}^2 x) - 5\operatorname{sen} x}\, d(\operatorname{sen} x) = \\
&= \int \frac{2t-1}{t^2-5t+6}\, dt = \int \frac{2t-5}{t^2-5t+6}\, dt + 4\int \frac{1}{t^2-5t+6}\, dt = \\
&= \int \frac{1}{t^2-5t+6}\, d(t^2-5t+6) + 4\int \frac{1}{(t-3)(t-2)}\, dt = \\
&= \log|t^2-5t+6| + 4\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt = \\
&= \log|t^2-5t+6| + 4\log|t-3| - 4\log|t-2| + c = \\
&= \log|\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 6| + 4\log|\operatorname{sen} x - 3| - 4\log|\operatorname{sen} x - 2| + c
\end{aligned}$$

Alternativamente si poteva notare che

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t-1}{t^2-5t+6}\, dt = 5\int \frac{1}{t-3}\, dt - 3\int \frac{1}{t-2}\, dt &= 5\log|t-3| - 3\log|t-2| + c = \\
&= 5\log|\operatorname{sen} x - 3| - 3\log|\operatorname{sen} x - 2| + c
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 12 marzo 2002

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti, usando il Teorema de L'Hôpital ove sembri opportuno

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(3x) - x - 2}{x \operatorname{sen}(5x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2-1} + 3\cos e^x}{4 - \cos e^{-x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\tan e^x}{\log(1+2/x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(4x) - 4x^2}{e^{3x^2} - 1 - 3x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2\arctan(x^2 - 3x) - \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2+x})}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{4 + 3x + 3x^2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \sqrt{x}/(e^x + 4)$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità, la derivabilità ed il segno di g; **c)** calcolare la derivata prima; **d)** studiare qualitativamente il segno di g' e gli intervalli di crescenza/decrescenza di g; **e)** calcolare la derivata seconda e, usando opportunamente il teorema degli zeri, dimostrare che esiste almeno uno zero di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{2-x}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{4\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x} + 3x^{3/2}}{2x}$, (c) $\dfrac{5\log x - 2}{3x}$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $(5 - x^2)e^{3x}$.

6. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{4 - \cos^2 x - 4\operatorname{sen} x}\,dx$$

mediante la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$. Conviene ricordare la relazione fondamentale tra seno e coseno.

Compito D

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

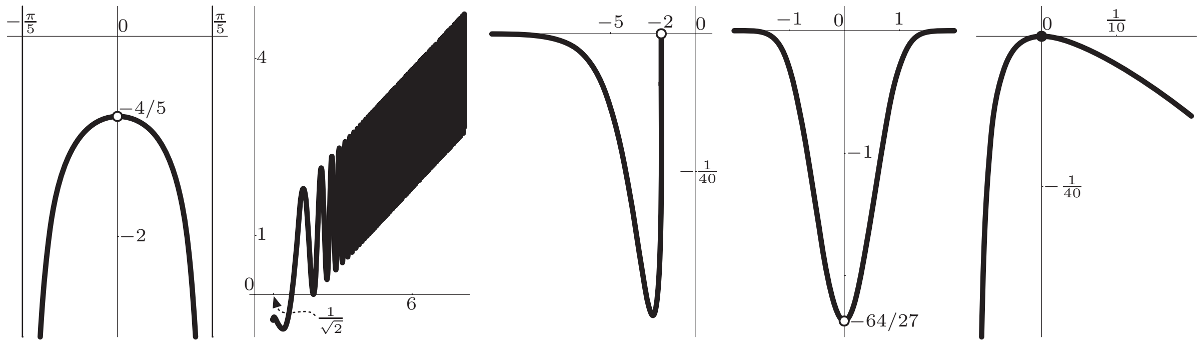
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito D

Compitino del 16 marzo 2001

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1. a. Si può applicare de L'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(3x)-x-2}{x\,\mathrm{sen}(5x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-3\,\mathrm{sen}(3x)-1}{\mathrm{sen}(5x)+5x\cos(5x)} =$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-9\cos(3x)}{10\cos(5x)-25x\,\mathrm{sen}(5x)} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}.$$

Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-4/5$. Alternativamente si poteva procedere nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(3x)-x-2}{x\,\mathrm{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+\cos(3x)-x-2}{5x^2}\cdot\frac{5x}{\mathrm{sen}(5x)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(3x)-x-2}{5x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-3\,\mathrm{sen}(3x)-1}{10x} =$$
$$= \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-9\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\right) = \frac{1-9}{10} = -\frac{4}{5}.$$

b. Il limite richiesto non è in forma indeterminata: il numeratore, somma di una funzione che tende all'infinito ed una funzione limitata, tende a $+\infty$, il denominatore tende a 3. Quindi il limite richiesto e $+\infty$.

c. Si può applicare de L'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\tan e^x}{\log(1+2/x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{e^x}{\cos^2 e^x}}{\frac{1}{1+2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+2x}{e^{-x}}\frac{1}{\cos^2 e^x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1 = 0\,.$$

Il limite $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x)/e^{-x}=0$ è fondamentale (la funzione esponenziale domina qualsiasi polinomio), ma può essere anch'esso calcolato con de L'Hôpital. In conclusione, per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 0.

d. Si può applicare de L'Hôpital quattro volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}(4x)-4x^2}{e^{3x^2}-1-3x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(4x)+4x\cos(4x)-8x}{6xe^{3x^2}-6x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{8\cos(4x)-16x\,\mathrm{sen}(4x)-8}{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}-1}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-6\,\mathrm{sen}(4x)-8x\cos(4x)}{18xe^{3x^2}+36x^3e^{3x^2}}$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\frac{4}{27}\lim_{x\to 0}\frac{-16\cos(4x)+16x\,\mathrm{sen}(4x)}{e^{3x^2}+12x^2e^{3x^2}+12x^4e^{3x^2}}=\frac{4}{27}\cdot\frac{-16}{1}=-\frac{64}{27}.$$

Alternativamente, dopo la prima applicazione del teorema si poteva procedere nel seguente modo: mediante semplici calcoli algebrici si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(4x)+4x\cos(4x)-8x}{6xe^{3x^2}-6x}=-\frac{4^3}{6\cdot 3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^2}{e^{3x^2}-1}\Big(\frac{4x-\mathrm{sen}(4x)}{(4x)^3}+\frac{1-\cos(4x)}{(4x)^2}\Big)\right]=$$

$$=-\frac{64}{18}\cdot 1\cdot\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\Big)=-\frac{64}{27},$$

dove sono stati utilizzati i seguenti limiti noti

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{z\to 0}\frac{z-\mathrm{sen}\,z}{z^3}=\frac{1}{6}\,,$$

il terzo dei quali può essere verificato mediante de L'Hôpital. Per il Teorema de L'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $-64/27$.

e. Il limite non è in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\arctan(x^2-3x)-\mathrm{arcsen}(\frac{1}{2+x})}=\frac{0}{0-\pi/6}=0\,.$$

2.a+b. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai e quindi, essendo una funzione razionale, è anche ovunque continua e derivabile. Il limite di f a $\pm\infty$ vale $-1/3$.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x)\geq 0$ se e solo se $x^2+x-2\leq 0$ ovvero sse $-2\leq x\leq 1$.

d. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x)=\frac{-(1+2x)(3x^2+3x+4)-(2-x-x^2)(6x+3)}{(3x^2+3x+4)^2}=-10\frac{2x+1}{(3x^2+3x+4)^2}\,.$$

Alternativamente si poteva notare che

$$f(x)=\frac{1}{3}\Big(-1+\frac{10}{3x^2+3x+4}\Big)\quad\Longrightarrow\quad f'(x)=-\frac{10}{3(3x^2+3x+4)^2}(6x+3)\,.$$

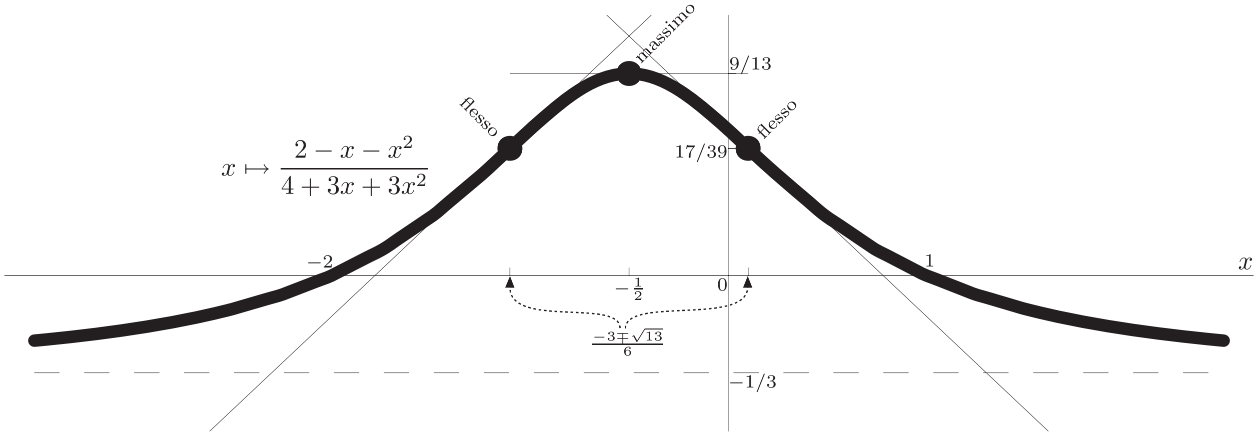
Si ha quindi che $f'(x)\geq 0$ se e solo se $x\leq -1/2$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty,-1/2[$, decrescente su $]-1/2,+\infty[$ ed ammette un massimo relativo (ed assoluto) per $x=-1/2$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x)=-10\frac{2(3x^2+3x+4)^2-(2x+1)2(3x^2+3x+4)(6x+3)}{(3x^2+3x+4)^4}=$$

$$=-20\frac{(3x^2+3x+4)-3(2x+1)^2}{(3x^2+3x+4)^3}=20\frac{9x^2+9x-1}{(3x^2+3x+4)^3}.$$

Si ha $f''(x)\geq 0$ se e solo se $9x^2+9x-1\geq 0$. Si ottiene che f è convessa sugli intervalli $]-\infty,-1/2-\sqrt{13}/6[$ e $]-1/2+\sqrt{13}/6,+\infty[$ mentre è concava su $]-1/2-\sqrt{13}/6,-1/2+\sqrt{13}/6[$. In corrispondenza di $-1/2\pm\sqrt{13}/6$, la funzione ha due punti di flesso.



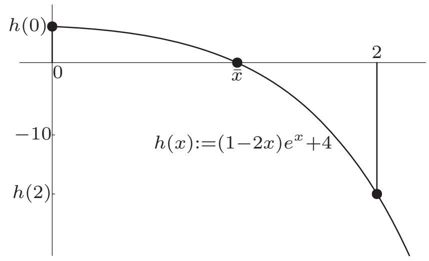
3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = [0, +\infty[$. La funzione è ivi continua, mentre risulta derivabile solamente su $]0, +\infty[$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (l'esponenziale domina qualsiasi potenza di x). La funzione si annulla in $x = 0$ ed è strettamente positiva altrove.

c. Per $x > 0$, la derivata prima è

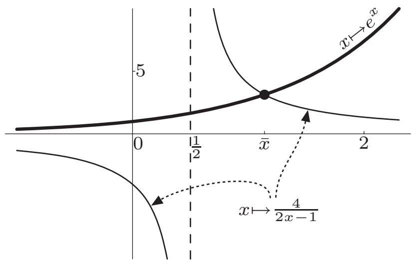
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x+4) - \sqrt{x}\,e^x}{(e^x+4)^2} = \frac{(1-2x)e^x + 4}{2\sqrt{x}(e^x+4)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende da quello del numeratore, ovvero $g'(x) \geq 0$ se e solo se $h(x) := (1-2x)e^x + 4 \geq 0$, disequazione non risolubile simbolicamente.

d. Osserviamo che poiché $h(0) = 5 > 0$, $h(2) = 4 - 3e^2 < 0$ ed $h(x)$ è continua, il Teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un punto $\bar{x} \in]0, 2[$ per cui $h(\bar{x}) = 0$ ovvero $g'(\bar{x}) = 0$. Sempre dallo studio del segno di $h(x)$ è chiaro che almeno uno di questi punti dovrà essere di massimo relativo. Per studiare più precisamente il segno di g' si può procedere in due modi.



[I metodo]: risulta chiaro che se $x \in]0, 1/2]$ allora $h(x) = (1-2x)e^x + 4 \geq 4 > 0$ e quindi g' è positiva (dunque g è strettamente crescente). Per $x > 1/2$ la disequazione $g'(x) \geq 0$ equivale a $e^x \leq 4/(2x-1)$. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente su $]1/2, +\infty[$ e la funzione $z(x) = 4/(2x-1)$ è strettamente decrescente sullo stesso intervallo, e tende a $+\infty$ se $x \to 1/2^-$ e tende a 0 all'infinito, allora graficamente si deduce che esiste un unico punto $\bar{x} > 1/4$ per cui

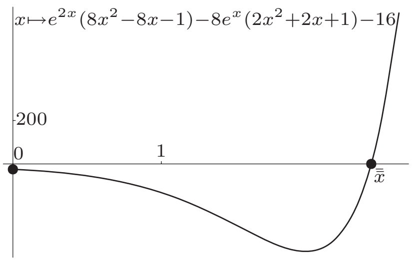


$$\begin{cases} e^x < 4/(2x-1), & \text{se } 1/2 < x < \bar{x}, \\ e^x = 4/(2x-1), & \text{se } x = \bar{x}, \\ e^x > 4/(2x-1), & \text{se } x > \bar{x}, \end{cases}$$

e di conseguenza

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \bar{x}, \\ = 0, & \text{se } x = \bar{x}, \\ < 0, & \text{se } x > \bar{x}. \end{cases}$$

In particolare g è crescente su $]0, \bar{x}[$, decrescente su $]\bar{x}, +\infty[$, ed ammette un massimo relativo (che risulta anche massimo assoluto) in $x = \bar{x}$.



[II Metodo]: si studia il segno di $h(x)$ per mezzo della sua derivata prima. Essendo $h'(x) = -(1+2x)e^x < 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $h(x)$ è ivi strettamente decrescente e quindi il punto $\bar{x}$ trovato sopra è unico. Si conclude poi con gli stessi risultati del I metodo.

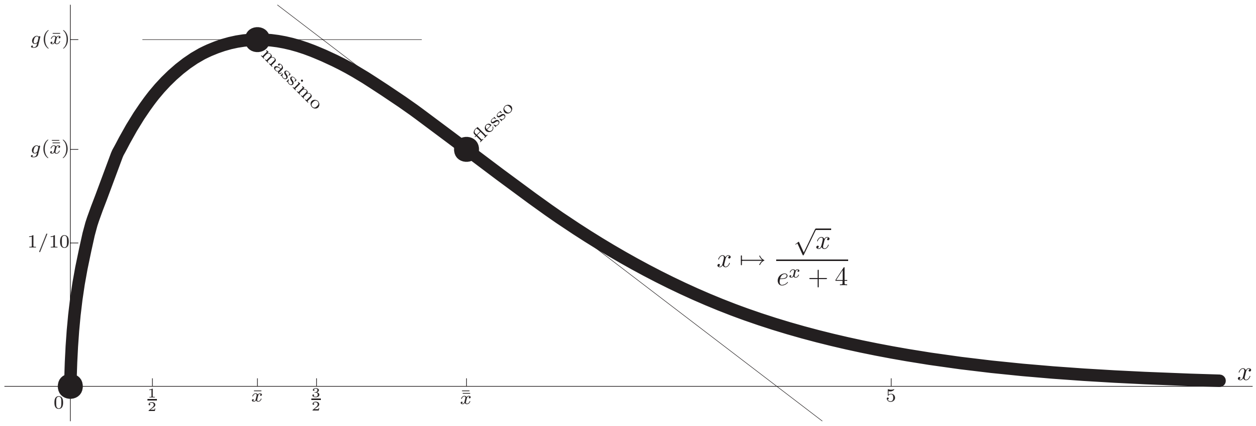
e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-e^x(1+2x)\sqrt{x}(e^x+4)^2 - ((1-2x)e^x+4)\Big(\frac{(e^x+4)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}2(e^x+4)e^x\Big)}{2x(e^x+4)^4} =$$

$$= -\frac{e^x(1+2x)2x(e^x+4) + ((1-2x)e^x+4)\big((e^x+4)+4xe^x\big)}{4x\sqrt{x}(e^x+4)^3} =$$

$$= \frac{e^{2x}(8x^2-8x-1) - 8e^x(2x^2+2x+1) - 16}{4x\sqrt{x}(e^x+4)^3}$$

Il segno di g'' dipende solo dal suo numeratore, che vale -25 in $x=0$ e tende a $+\infty$ all'infinito. Il Teorema degli zeri ci assicura nuovamente l'esistenza di almeno uno zero della derivata seconda di g.



4. Si ha

$$\int \frac{2-x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) + 2\arctan x = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + 2\arctan x + c\,;$$

$$\int \frac{4\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x} + 3x^{3/2}}{2x}\,dx = 2\int x^{-1/6}\,dx + \frac{3}{2}\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{(1-1/6)}x^{1-1/6} + \frac{3}{2(1+1/2)}x^{1+1/2} + c =$$

$$= \frac{12}{5}x^{5/6} + x^{3/2} + c, \qquad (x>0)\,;$$

$$\int \frac{5\log x - 2}{3x}\,dx = \frac{5}{3}\int \log x\,d(\log x) - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{5}{6}\log^2 x - \frac{2}{3}\log x + c, \qquad (x>0)\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

$$\int (5-x^2)e^{3x}\,dx = (5-x^2)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}(-2x)\,dx =$$

$$= (5-x^2)\frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\Big(x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\Big) = \frac{e^{3x}}{27}\big(9(5-x^2) + 6x - 2\big) + c$$

6. Ricordando la relazione $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, e che $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$, mediante la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ ci si riconduce a calcolare l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x - \cos x}{4 - \cos^2 x - 4\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x - 1}{4 - (1-\operatorname{sen}^2 x) - 4\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2-4t+3}\,dt = \int \frac{t-1}{(t-1)(t-3)}\,dt = \int \frac{1}{t-3}\,dt = \log|t-3| + c =$$

$$= \log|\operatorname{sen} x - 3| + c$$