Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 5 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^3-2}-\sqrt{5x^2+12}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x\operatorname{sen}x)}{\tan(x^2)}$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x-x^2-3x+7}{3x^3+3^x+5}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2-2x^3}{7x^3-24x^2-x-15}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{3+x}}{5x^2+x^3}$

(f) $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^3+5\sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{2x\tan\sqrt[3]{x}+3(1-\cos\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(g) $\lim_{x\to 3}\left((x^2-9)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{e^x}{x-3}\right)^2+3\right)\right)$

(h) $\lim_{x\to 2}\frac{5e^x+12x}{(2-x)^3}$

(i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-x-5}{1-x^2}$

(j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}e^{-2x})\right)}{3x+5}$

(k) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4+3x^2-x-1}-\sqrt{2x^4+x^2+7}\right)$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+7}\right)$

(m) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{1+3x^3+x^4}$

(n) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x\operatorname{sen}x^3}$

(o) $\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arcsen}(x+1)-3\operatorname{arcsen}(x-1)}{2x+1}$

(p) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{4x^7+1}\right)$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in $x=0$ della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases}\sqrt{1+a^2(x+1)} & \text{se } x\ge 0,\\ \dfrac{2\operatorname{sen}(ax)+\sqrt{x^2-3a^2x^3}}{x} & \text{se } x<0.\end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 5 dicembre 2001

Svolgimento

1. a.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^3-2}-\sqrt{5x^2+12}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}|x|^{3/2}\left(\sqrt{2-\frac{2}{x^3}}-\sqrt{\frac{5}{x}+\frac{12}{x^3}}\right)=\left[+\infty\cdot(\sqrt{2}-0)\right]=+\infty.$$

b.

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x\operatorname{sen}x)}{\tan x^2}=\lim_{x\to0}\left(2\frac{\operatorname{sen}(2x\operatorname{sen}x)}{2x\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{x^2}{\tan x^2}\right)=\left[2\cdot1\cdot1\cdot1\right]=2\,.$$

c.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x-x^2-3x+7}{3x^3+3^x+5}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^x\cdot\frac{1-x^2/5^x-3x/5^x+7/5^x}{1+3x^3/3^x+5/3^x}=\left[+\infty\cdot1\right]=+\infty\,.$$

d.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2-2x^3}{7x^3-24x^2-x-15}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+1/x^3-1/x}{7-24/x-1/x^2-15/x^3}=-\frac{2}{7}\,.$$

e.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{3+x}}{5x^2+x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{3+x}}{5+x}\cdot\frac{1}{x^2}=\left[\frac{1-\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{0^+}\right]=-\infty\,.$$

f.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3x^3+5\sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{2x\tan\sqrt[3]{x}+3(1-\cos\sqrt{x})\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^3+5x^{4/3}\frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}}{2x^{4/3}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}+3\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}x^{3/2}}=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^{5/3}+5\frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}}{2\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}+3\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}x^{1/6}}=\left[\frac{3\cdot0+5\cdot1}{2\cdot1+3\cdot\frac{1}{2}\cdot0}\right]=\frac{5}{2}.$$

g. È del tipo $\left[0\cdot\{\text{funzione limitata}\}\right]$ e quindi il limite vale 0.

h. Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $5e^2+24>0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno sinistro di 1 e negativo in un intorno destro perciò

$$\lim_{x\to2^-}\frac{5e^x+12x}{(2-x)^3}=+\infty,\qquad\lim_{x\to2^+}\frac{5e^x+12x}{(2-x)^3}=-\infty\,,$$

i.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-x-5}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{3+2/x-1/x^2-5/x^3}{-1+1/x^2}\right)=\left[+\infty\cdot(-3)\right]=-\infty\,.$$

j.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\bigl(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}e^{-2x})\bigr)}{3x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\bigl(2\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}e^{-2x})\cos(\operatorname{arcsen}e^{-2x})\bigr)}{3x+5}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log2-2x+\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-2x})}{3x+5}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\log2/x+\bigl(\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-2x})\bigr)/x}{3+5/x}=\left[\frac{-2+0+0}{3+0}\right]=-\frac{2}{3}.$$

k.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4+3x^2-x-1}-\sqrt{2x^4+x^2+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^4+3x^2-x-1)-(2x^4+x^2+7)}{\sqrt{2x^4+3x^2-x-1}+\sqrt{2x^4+x^2+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-8}{\sqrt{2x^4+3x^2-x-1}+\sqrt{2x^4+x^2+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{8}{x^2}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

l.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+7}}=\left[\frac{-8}{+\infty}\right]=0\,.$$

m.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{1+3x^3+x^4}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+1/x^3}{1+3/x+1/x^4}\right)=[0\cdot 1]=0\,.$$

n.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x\,\mathrm{sen}\,x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\cdot\frac{x^3}{\mathrm{sen}\,x^3}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1\right]=\frac{1}{4}\,.$$

o. Il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione è $\mathcal{D}=\{x\ :\ -1\le x+1\le 1,\ -1\le x-1\le 1\}=\{0\}$. Quindi 0 è punto isolato del dominio e dunque non è di accumulazione. Di conseguenza non ha senso calcolare il limite che quindi non esiste.

p. Il limite è della forma $[+\infty+\infty]$ e dunque vale $+\infty$.

2 Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 0 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\sqrt{1+a^2}\,.$$

Per quanto riguarda il limite sinistro (ricordando che se $x<0$ allora $|x|=-x$), se $a\neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2a\frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}+\frac{|x|\sqrt{1-3a^2x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(2a\frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}-\sqrt{1-3a^2x}\right)=2a-1\,.$$

Alla stessa formula si perviene direttamente anche nel caso $a=0$.
Affinché la funzione sia continua in 0 dovrà dunque essere $\sqrt{1+a^2}=2a-1$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}(\sqrt{1+a^2})^2=(2a-1)^2\\ 2a-1\ge 0\end{cases}$$

La prima equazione equivale a $3a^2-4a=0$ che ha come soluzioni $a_1=0$, $a_2=4/3$. Solamente a_2 soddisfa la disequazione $2a-1\ge 0$. Perciò l'unica soluzione del problema è $a_2=4/3$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 5 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2x^2-7}{x^2+3x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{2x^3-3x^2-1}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(\tan x)}{x \operatorname{sen}(2x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(1-\cos\sqrt[3]{x^2})+2x\operatorname{sen}\sqrt{x}}{7x^2-3x\tan\sqrt[3]{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^3+3}-1}{(x-1)^3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+13}-\sqrt{4x^2+5}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(2x)-\cos^2 x}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+5}{5x^3-12x^2+5}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3^x+5}{7\cdot 3^x+6x^7-1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(3^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4^x}\right)\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} e^{-3x})\right)}{3-2x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen}(x+1)-2\operatorname{arcsen}(x-1)}{5x+1}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{6x^2+x-2}-\sqrt{6x^2+6x+1}\right)$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+7}+\sqrt{x^3+2}\right)$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2^x+3\cos x-1}{x^2+7x^3}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-7x^2+2}{4x^3+12x-1}$.

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in $x=0$ della seguente funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4+a^2(x+1)} & \text{se } x\ge 0, \\ \dfrac{3\operatorname{sen}(ax)+\sqrt{4x^2-5a^2x^3}}{x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 5 dicembre 2001

Svolgimento

1. a.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2-7}{x^2+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\Big(x\cdot\frac{2-2/x-7/x^3}{1+3/x+1/x^2}\Big)=\big[+\infty\cdot 2\big]=+\infty\,.$$

b.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{2x^3-3x^2-1}\big)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}|x|^{3/2}\Bigg(\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}\Bigg)=\big[+\infty\cdot(0-\sqrt{2})\big]=-\infty.$$

c.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\tan x)}{x\,\mathrm{sen}(2x)}=\lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos(\tan x)}{\tan^2 x}\cdot\frac{\tan^2 x}{x^2}\cdot\frac{2x}{\mathrm{sen}(2x)}\Big)=\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\Big]=\frac{1}{4}\,.$$

d.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos\sqrt[3]{x^2})+2x\,\mathrm{sen}\sqrt{x}}{7x^2-3x\tan\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x^2})^2}x^{4/3}+2x^{3/2}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{7x^2-3x^{4/3}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x^2})^2}+2\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}x^{1/6}}{7x^{2/3}-3\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\left[\frac{\frac{1}{2}+2\cdot1\cdot0}{7\cdot0-3\cdot1}\right]=-\frac{1}{6}.$$

e. Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $1>0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di 1 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^3+3}-1}{(x-1)^3}=-\infty,\qquad\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^3+3}-1}{(x-1)^3}=+\infty\,.$$

f.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{4x^2+13}-\sqrt{4x^2+5}\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{4x^2+13}+\sqrt{4x^2+5}}=\Big[\frac{8}{+\infty}\Big]=0\,.$$

g.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x)-\cos^2 x}{x^2}=-\lim_{x\to0}\Big(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\Big)^2=-1\,.$$

h.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{5x^3-12x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{x}\cdot\frac{2-7/x+5/x^2}{5-12/x+5/x^3}\Big)=\Big[0\cdot\frac{2}{5}\Big]=0\,.$$

i.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3^x+5}{7\cdot3^x+6x^7-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x^3/3^x+5/3^x}{7+6x^7/3^x-1/3^x}=-\frac{1}{7}\,.$$

j. È del tipo $\big[0\cdot\{\text{funzione limitata}\}\big]$ e quindi il limite vale 0.

k.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(\operatorname{sen}(2\arcsen e^{-3x})\big)}{3-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(2\operatorname{sen}(\arcsen e^{-3x})\cos(\arcsen e^{-3x})\big)}{3-2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2-3x+\log\cos(\arcsen e^{-3x})}{3-2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\log 2/x+\big(\log\cos(\arcsen e^{-3x})\big)/x}{-2+3/x}=\left[\frac{-3+0+0}{-2+0}\right]=\frac{3}{2}.$$

l. Il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione è $\mathcal{D}=\{x\ :\ -1\le x+1\le 1,\ -1\le x-1\le 1\}=\{0\}$. Quindi 0 è punto isolato del dominio e dunque non è di accumulazione. Di conseguenza non ha senso calcolare il limite che quindi non esiste.

m.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{6x^2+x-2}-\sqrt{6x^2+6x+1}\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x^2+x-2)-(6x^2+6x+1)}{\sqrt{6x^2+x-2}+\sqrt{6x^2+6x+1}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{\sqrt{6x^2+x-2}+\sqrt{6x^2+6x+1}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{3}{x}}{\sqrt{6+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{6+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

n. Il limite è della forma $[+\infty+\infty]$ e dunque vale $+\infty$.

o.

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+3\cos x-1}{x^2+7x^3}=\lim_{x\to0}\Big(\frac{2^x+3\cos x-1}{1+7x}\cdot\frac{1}{x^2}\Big)=\Big[3\cdot\frac{1}{0^+}\Big]=+\infty\,.$$

p.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-7x^2+2}{4x^3+12x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-7/x+2/x^3}{4+12/x^2-1/x^3}=\frac{3}{4}\,.$$

2 Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 0 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\sqrt{4+a^2}\,.$$

Per quanto riguarda il limite sinistro (ricordando che se $x<0$ allora $|x|=-x$), se $a\neq0$, si ha

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(3a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}+\frac{|x|\sqrt{4-5a^2x}}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(3a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}-\sqrt{4-5a^2x}\right)=3a-2\,.$$

Alla stessa formula si perviene direttamente anche nel caso $a=0$.
Affinché la funzione sia continua in 0 dovrà dunque essere $\sqrt{4+a^2}=3a-2$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}(\sqrt{4+a^2})^2=(3a-2)^2\\ 3a-2\ge0\end{cases}$$

La prima equazione equivale a $8a^2-12a=0$ che ha come soluzioni $a_1=0$, $a_2=3/2$. Solamente a_2 soddisfa la disequazione $3a-2\ge0$. Perciò l'unica soluzione del problema è $a_2=3/2$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 5 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+12}-\sqrt{1+5x^2}\right)$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-3}-\sqrt{2x^2+4x+1}\right)$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}e^{-x})\right)}{4x-1}$

(d) $\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\left(4+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(2x-\pi)^2}\right)\right)\right)$

(e) $\lim_{x\to-2}\frac{\log(x+4)}{(x+2)^5}$

(f) $\lim_{x\to0^+}\frac{3(1-\cos\sqrt{x^3})+5\sqrt[3]{x}\tan\sqrt{x}}{2x^{5/6}-\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}x^2}$

(g) $\lim_{x\to0}\frac{2e^x+7x+1}{x^2-3x^3}$

(h) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2^x-x^4-7}{3x^4+5^x+10}$

(i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2x^2+7}\right)$

(j) $\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^3+x+7}-\sqrt{7x^2+x-12}\right)$

(k) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+x+12}{7x^2-2x-4}$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+12x+3}{2x^2+x^3-1}$

(m) $\lim_{x\to0}\frac{\tan(1-\cos x)}{1-\cos(\operatorname{sen}x)}$

(n) $\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)}{3x\tan x^2}$

(o) $\lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{arcsen}(x+1)-\operatorname{arcsen}(x-1)}{7x+1}$

(p) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2-20x+3}{x^2-3x^3+15}$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in $x=0$ della seguente funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4+a^2(x+1)} & \text{se } x\geq 0,\\[2mm] \dfrac{2\operatorname{sen}(ax)+\sqrt{4x^2-3a^2x^3}}{x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 5 dicembre 2001

Svolgimento

1. a.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+12}-\sqrt{1+5x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{11}{\sqrt{5x^2+12}+\sqrt{1+5x^2}}=\left[\frac{11}{+\infty}\right]=0\,.$$

b.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-3}-\sqrt{2x^2+4x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+x-3)-(2x^2+4x+1)}{\sqrt{2x^2+x-3}+\sqrt{2x^2+4x+1}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+x-3}+\sqrt{2x^2+4x+1}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

c.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}e^{-x})\right)}{4x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(2\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}e^{-x})\cos(\operatorname{arcsen}e^{-x})\right)}{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2-x+\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-x})}{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\log 2/x+\left(\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-x})\right)/x}{4-1/x}=\left[\frac{-1+0+0}{4-0}\right]=-\frac{1}{4}.$$

d. È del tipo $\left[0\cdot\{\text{funzione limitata}\}\right]$ e quindi il limite vale 0.

e. Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $\log 2>0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di -2 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{\log(x+4)}{(x+2)^5}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-2^+}\frac{\log(x+4)}{(x+2)^5}=+\infty\,.$$

f.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3(1-\cos\sqrt{x^3})+5\sqrt[3]{x}\tan\sqrt{x}}{2x^{5/6}-\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{3\frac{1-\cos\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x^3})^2}x^3+5x^{5/6}\cdot\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{2x^{5/6}-x^{7/3}\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{3\frac{1-\cos\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x^3})^2}x^{13/6}+5\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{2-\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}x^{3/2}}=\left[\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot0+5\cdot1}{2-1\cdot0}\right]=\frac{5}{2}.$$

g.

$$\lim_{x\to0}\frac{2e^x+7x+1}{x^2-3x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2e^x+7x+1}{1-3x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\left[3\cdot\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\,.$$

h.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2^x-x^4-7}{3x^4+5^x+10}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\frac{3-x^4/2^x-7/2^x}{1+3x^4/5^x+10/5^x}=[0\cdot3]=0\,.$$

i.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2x^2+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{7}{x^2}}\right)=$$

$$=\left[+\infty\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]=+\infty.$$

j. Il limite è della forma $[-\infty-\infty]$ e dunque vale $-\infty$.

k.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+x+12}{7x^2-2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\frac{5+1/x^2+12/x^3}{7-2/x-4/x^2}\right)=\left[-\infty\cdot\frac{5}{7}\right]=-\infty\,.$$

l.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+12x+3}{2x^2+x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+12/x+3/x^2}{1+2/x-1/x^3}\right)=[0\cdot 1]=0\,.$$

m.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(1-\cos x)}{1-\cos(\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)^2\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos(\operatorname{sen}x)}\right)=$$
$$=\left[1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right]=1.$$

n.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)}{3x\tan x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\tan x^2}\right)=\left[\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right]=\frac{1}{3}\,.$$

o. Il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione è $\mathcal{D}=\{x\ :\ -1\le x+1\le 1,\ -1\le x-1\le 1\}=\{0\}$. Quindi 0 è punto isolato del dominio e dunque non è di accumulazione. Di conseguenza non ha senso calcolare il limite che quindi non esiste.

p.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2-20x+3}{x^2-3x^3+15}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-1/x-20/x^2+3/x^3}{-3+1/x+15/x^3}=-\frac{2}{3}\,.$$

2 Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 0 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\sqrt{4+a^2}\,.$$

Per quanto riguarda il limite sinistro (ricordando che se $x<0$ allora $|x|=-x$), se $a\neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}+\frac{|x|\sqrt{4-3a^2x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(2a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}-\sqrt{4-3a^2x}\right)=2a-2\,.$$

Alla stessa formula si perviene direttamente anche nel caso $a=0$.
Affinché la funzione sia continua in 0 dovrà dunque essere $\sqrt{4+a^2}=2a-2$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}(\sqrt{4+a^2})^2=(2a-2)^2\\ 2a-2\ge 0\end{cases}$$

La prima equazione equivale a $3a^2-8a=0$ che ha come soluzioni $a_1=0$, $a_2=8/3$. Solamente a_2 soddisfa la disequazione $2a-2\ge 0$. Perciò l'unica soluzione del problema è $a_2=8/3$.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 5 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-7x+2}{x^3+x+5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - 2\cos x}{4x^2+x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x+x^2+7}{1+2x-5x^3-x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x - 1}{x\tan(3x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{x-1}-\sqrt{x^3+2}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^3\operatorname{sen}(3x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(\operatorname{sen}(2\arcsen e^{-3x})\right)}{2-5x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\arcsen(x+1)-3\arcsen(x-1)}{2x+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^3+3}-\sqrt{1+2x^3}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4+3x^2}{2x^3+7x^4-x+3}$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-7}-\sqrt{7x^2+5}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\operatorname{sen}(3^x)+7)\,2^{-x}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+7}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^4-4^x}{2\cdot 3^x+2x^5+1}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5(1-\cos\sqrt[3]{x})x+2x^{3/2}}{7\sqrt{x}\operatorname{sen} x - x^2\tan\sqrt{x}}$

(p) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos x+5}{(3-x)^3}$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità in $x=0$ della seguente funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1+a^2(x+1)} & \text{se } x\geq 0,\\ \dfrac{3\operatorname{sen}(ax)+\sqrt{x^2-4a^2x^3}}{x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Compito D

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 5 dicembre 2001

Svolgimento

1. a.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-7x+2}{x^3+x+5}=\lim_{x\to-\infty}\Big(x\cdot\frac{5-7/x^3+2/x^4}{1+1/x^2+5/x^3}\Big)=[-\infty\cdot 5]=-\infty\,.$$

b.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-2\cos x}{4x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\operatorname{sen}x-2\cos x}{4+x}\cdot\frac{1}{x^2}\Big)=\Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0^+}\Big]=-\infty\,.$$

c.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+x^2+7}{1+2x-5x^3-x^4}=\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-3/x^2+1/x+7/x^3}{-1+1/x^4+2/x^3-5/x}\Big)=[0\cdot(-1)]=0\,.$$

d.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-1}{x\tan(3x)}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\cos^2 x+\cos x+1}{3}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{3x}{\tan(3x)}\Big)=\Big[1\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot 1\Big]=-\frac{1}{2}\,.$$

e. Il limite è della forma $[-\infty-\infty]$ e dunque vale $-\infty$.

f.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^3\operatorname{sen}(3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\Big(\frac{1-\cos x}{x^2}\Big)^2\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\right)=$$
$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot 1\right]=\frac{1}{24}.$$

g.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}e^{-3x})\big)}{2-5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(2\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}e^{-3x})\cos(\operatorname{arcsen}e^{-3x})\big)}{2-5x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2-3x+\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-3x})}{2-5x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\log 2/x+\big(\log\cos(\operatorname{arcsen}e^{-3x})\big)/x}{-5+2/x}=\Big[\frac{-3+0+0}{-5+0}\Big]=\frac{3}{5}.$$

h. Il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione è $\mathcal{D}=\{x\ :\ -1\le x+1\le 1,\ -1\le x-1\le 1\}=\{0\}$. Quindi 0 è punto isolato del dominio e dunque non è di accumulazione. Di conseguenza non ha senso calcolare il limite che quindi non esiste.

i.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x^3+3}-\sqrt{1+2x^3}\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{2x^3+3}+\sqrt{1+2x^3}}=\Big[\frac{2}{+\infty}\Big]=0\,.$$

j.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4+3x^2}{2x^3+7x^4-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+1/x^4+3/x^2}{7+2/x-1/x^3+3/x^4}=-\frac{1}{7}\,.$$

k.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-7}-\sqrt{7x^2+5}\big)=\lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}-\sqrt{7+\frac{5}{x^2}}\right)=$$
$$=\big[+\infty\cdot(1-\sqrt{7})\big]=-\infty.$$

l. È del tipo $\big[\{\text{funzione limitata}\cdot 0\}\big]$ e quindi il limite vale 0.

m.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+7}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5x+7)-(x^2-2x+2)}{\sqrt{x^2+5x+7}+\sqrt{x^2-2x+2}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+5}{\sqrt{x^2+5x+7}+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{7}{2}.$$

n.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4-4^x}{2\cdot 3^x+2x^5+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\frac{7x^4/4^x-1}{2+2x^5/3^x+1/3^x}\right)=\left[+\infty\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\infty\,.$$

o.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{5(1-\cos\sqrt[3]{x})x+2x^{3/2}}{7\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x-x^2\tan\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{5\frac{1-\cos\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2}x^{5/3}+2x^{3/2}}{7x^{3/2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}-x^2\tan\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{5\frac{1-\cos\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2}x^{1/6}+2}{7\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}-x^{1/2}\tan\sqrt{x}}=\left[\frac{5\frac{1}{2}\cdot0+2}{7\cdot1-0}\right]=\frac{2}{7}.$$

p. Non esiste poiché il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $\cos 3+5>0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno sinistro di 3 e negativo in un intorno destro perciò

$$\lim_{x\to3^-}\frac{\cos x+5}{(3-x)^3}=+\infty,\qquad \lim_{x\to3^+}\frac{\cos x+5}{(3-x)^3}=-\infty\,.$$

2 Imponiamo la condizione che il limite destro e sinistro della funzione in 0 esistano e coincidano col valore della funzione nel punto. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\sqrt{1+a^2}\,.$$

Per quanto riguarda il limite sinistro (ricordando che se $x<0$ allora $|x|=-x$), se $a\neq0$, si ha

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(3a\frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}+\frac{|x|\sqrt{1-4a^2x}}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(3a\frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}-\sqrt{1-4a^2x}\right)=3a-1\,.$$

Alla stessa formula si perviene direttamente anche nel caso $a=0$.
Affinché la funzione sia continua in 0 dovrà dunque essere $\sqrt{1+a^2}=3a-1$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}(\sqrt{1+a^2})^2=(3a-1)^2\\ 3a-1\geq0\end{cases}$$

La prima equazione equivale a $8a^2-6a=0$ che ha come soluzioni $a_1=0$, $a_2=3/4$. Solamente a_2 soddisfa la disequazione $3a-1\geq0$. Perciò l'unica soluzione del problema è $a_2=3/4$.