Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 settembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\big(\log(1+x^2)\big)}{\log\big(1+\arctan(x^2)\big)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi-x)-\cos(x-\pi/4)}{e^{4x-\pi}+2\cos(2x+\pi/2)+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\sqrt{3}\cos(x-\pi/6)+3\,\mathrm{sen}(3x+\pi/2)}{e^x-\cos(x-\pi/3)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)^x-e}{\log x-\log(x+1)}$.

2. Data la funzione $f(x) := x^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}$, si studino

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità e derivabilità;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) := (xe^x)\log(x-1)$

a. calcolarne l'integrale indefinito (ad esempio per parti cominciando con $\int xe^x\,dx = \ldots$);
b. dire se esiste l'integrale generalizzato $\int_1^2 g(x)\,dx$, e se sì calcolarlo.

4. Data la funzione di due variabili $h(x,y) := 1/\log(2-x^2-y^2)$, determinare e rappresentare nel piano cartesiano

a. il dominio di h;
b. le linee di livello k di h, specificando per quali valori di k tali linee esistono.

5. Data l'equazione differenziale $y''-y'-6y = 3x^2-5x+4$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

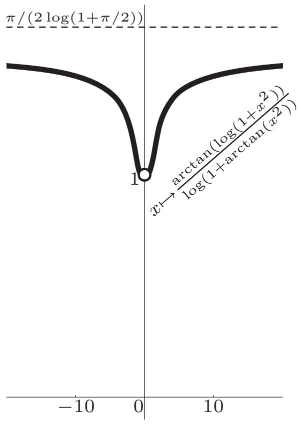
Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 8+4, 4+4, 2+4+2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

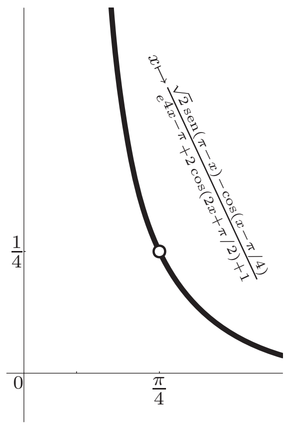
Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 settembre 2001

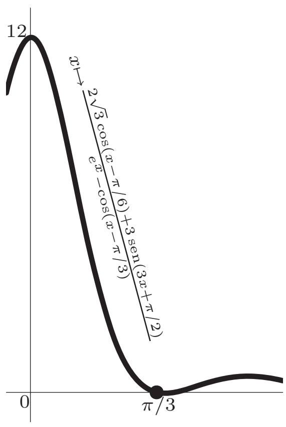
Svolgimento



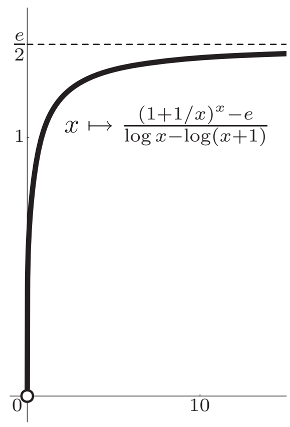
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\bigl(\log(1+x^2)\bigr)}{\log\bigl(1+\arctan(x^2)\bigr)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\log^2(1+x^2)}\cdot\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\arctan(x^2)}\cdot\frac{2x}{1+x^4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\bigl(1+\arctan(x^2)\bigr)(1+x^4)}{\bigl(1+\log^2(1+x^2)\bigr)(1+x^2)} = 1\,.$$

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi-x)-\cos(x-\pi/4)}{e^{4x-\pi}+2\cos(2x+\pi/2)+1} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sqrt{2}\cos(\pi-x)+\mathrm{sen}(x-\pi/4)}{4e^{4x-\pi}-4\,\mathrm{sen}(2x+\pi/2)}$$

$$= \left[\frac{-\sqrt{2}(-\sqrt{2}/2)+0}{4-0}\right] = \frac{1}{4}\,.$$

c. Il limite non è in forma indeterminata e vale 0.

d. Osservato che $\log x-\log(x+1)=\log(x/(x+1))$, si riconosce che il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Si ha inoltre

$$\frac{d}{dx}\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x = \frac{d}{dx}e^{x\log(1+(1/x))} = \Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x\left(\log\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\Bigl(-\frac{1}{x^2}\Bigr)\right)$$

$$= \Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x\left(\log\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)-\frac{1}{x+1}\right).$$

Applicando l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)^x-e}{\log x-\log(x+1)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)^x\Bigl(\log\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)-\frac{1}{x+1}\Bigr)}{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}$$

$$= e\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(x(x+1)\log\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)-x\right).$$

A questo punto la strategia migliore è quella di fare la sostituzione $y = 1/x$ per cui $y \to 0^+$. In questo modo si ottiene un'altra forma indeterminata a cui si può applicare l'Hôpital più agevolmente che all'originale. Più precisamente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x(x+1)\log\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)-x\right) = \lim_{y\to0^+}\frac{(y+1)\log(1+y)-y}{y^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{y\to0^+}\frac{\log(1+y)}{2y} = \frac{1}{2}\,.$$

Concludendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)^x - e}{\log x - \log(x+1)} = \frac{e}{2}\,.$$

Ad analoghi risultati si perviene facendo prima la sostituzione e poi applicando due volte l'Hôpital.

2. a+b. Il dominio è $\mathbb{R}$. La funzione è dovunque continua perché composizione di funzioni continue. La derivabilità incontra un ostacolo, perché la radice cubica $h(t) := \sqrt[3]{t}$ è derivabile per $t \neq 0$ ma non per $t = 0$ (tangente verticale). I teoremi di derivazione delle funzioni composte ci dicono che $f(x) = x^2 h(x-1)$ è derivabile per $x \neq 1$, ma non dicono se è derivabile o no per $x = 1$. Studieremo a parte il caso $x = 1$. Osserviamo poi che la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,.$$

c. Si ha banalmente $f(x) < 0$ per $x < 0$ e per $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 1$, e $f(x) > 0$ per $x > 1$.

d. Per ogni $x \neq 1$ la derivata prima è

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x-1} + x^2\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} = \frac{6x(x-1)+x^2}{3(x-1)^{2/3}} = $$
$$= \frac{x(7x-6)}{3(x-1)^{2/3}}\,,$$

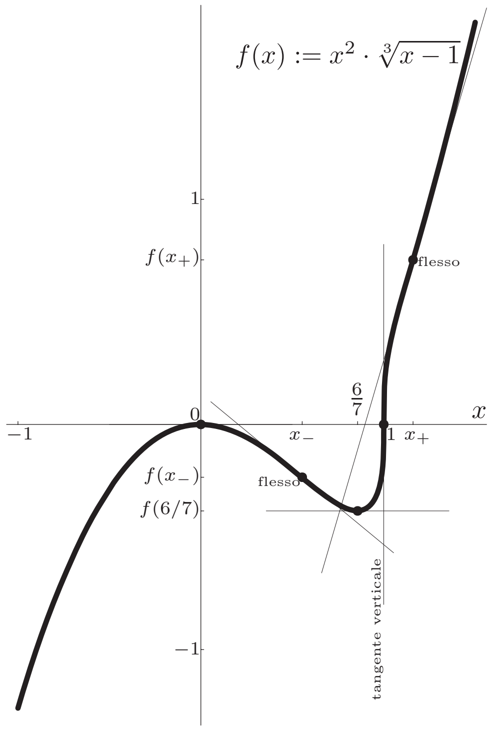
quindi si ottiene facilmente che

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{per } x<0,\ 6/7<x<1 \text{ e per } x>1,\\ =0 & \text{per } x=0 \text{ e per } x=6/7,\\ <0 & \text{per } 0<x<6/7.\end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]-\infty, 0[$, su $]6/7, 1[$ e su $]1, +\infty[$, ed è decrescente su $]0, 6/7[$. In $x = 0$ e $x = 6/7$ la funzione ha un massimo ed un minimo relativo, rispettivamente. Nel punto $x = 1$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)}{1} = $$
$$= \lim_{h\to0}\frac{(1+h)\bigl(7(1+h)-6\bigr)}{3h^{2/3}} = +\infty\,,$$

quindi in $x = 1$ la $f(x)$ non è derivabile e la tangente al grafico è verticale.



e. Per ogni $x \neq 1$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(14x-6)(x-1)^{2/3} - (7x^2-6x)\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}}{3(x-1)^{4/3}} = \frac{2(14x^2-24x+9)}{9(x-1)^{5/3}}\,.$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $14x^2 - 24x + 9 = 0$ sono $x_\pm = (12 \pm 3\sqrt{2})/14$. Si ha $0 < x_- < 6/7 < 1 < x_+$. Il segno di f'' è

$$f''(x)\begin{cases} <0 & \text{se } x<x_- \text{ oppure } 1<x<x_+,\\ =0 & \text{se } x=x_- \text{ oppure } x=x_+,\\ >0 & \text{se } x_-<x<1 \text{ oppure } x>x_+.\end{cases}$$

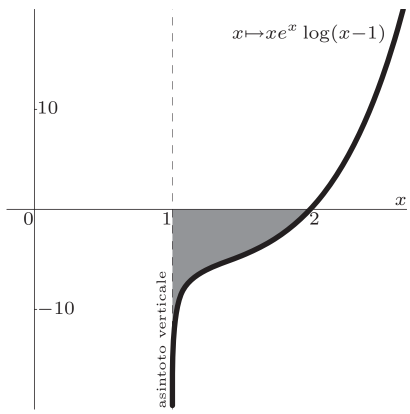
quindi la funzione è convessa su $]x_-, 1[$ e $]x_+, +\infty[$, concava su $]-\infty, x_-[$ e $]1, x_+[$. In $x = x_\pm$ la funzione ha due flessi a tangente obliqua, mentre in $x = 1$ ha un flesso a tangente verticale.

3. a. Applicando il metodo per parti si vede che

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x\,.$$

Perciò una primitiva G di g è data da

$$\int (xe^x)\log(x-1)\,dx = (x-1)e^x\log(x-1) - \int \frac{(x-1)e^x}{x-1}\,dx =$$
$$= (x-1)e^x\log(x-1) - e^x =: G(x)\,.$$



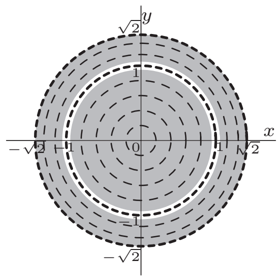
b. Ricordando che $\lim_{y\to 0^+}(y\log y) = 0$, dalla definizione di integrale generalizzato segue che

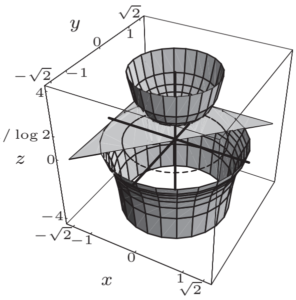
$$\int_1^2 g(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^2 g(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\big(G(2) - G(1+\delta)\big) = e - e^2\,.$$

4. a. Il dominio è dato da

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2<2,\ x^2+y^2\neq 1\big\},$$

che geometricamente corrisponde al cerchio aperto con centro l'origine e di raggio $\sqrt{2}$, privato della circonferenza $x^2+y^2=1$.





b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y)=k$, ovvero

$$\frac{1}{\log(2-x^2-y^2)} = k\,,$$

che equivale a $\log(2-x^2-y^2)=1/k$, cioè $2-x^2-y^2=e^{1/k}$, cioè ancora $x^2+y^2=2-e^{1/k}$. Geometricamente sono delle circonferenze concentriche. Chiaramente affinché tali circonferenze abbiano punti reali dovrà accadere che $2-e^{1/k}\geq 0$ (ricordandosi anche che le linee di livello devono appartenere al dominio, per cui dovrà anche essere $2>2-e^{1/k}\neq 1$ che però è sempre soddisfatta). Risolvendo questa disequazione otteniamo $k<0$ oppure $k\geq 1/\log 2$.

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-\lambda-6=0$ che ha come soluzioni $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}\,.$$

b. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x)=ax^2+bx+c$. Si ha $\bar{y}'(x)=2ax+b$, $\bar{y}''(x)=2a$. Quindi $\bar{y}$ dovrà soddisfare identicamente

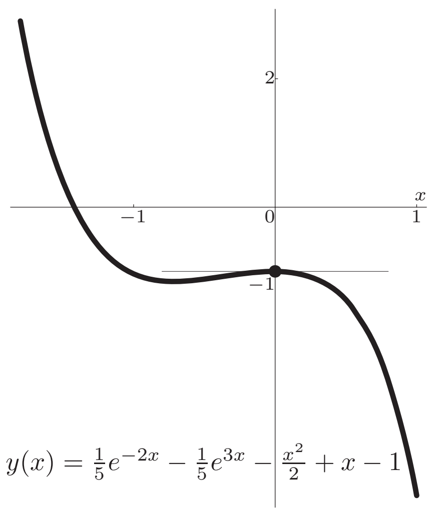
$$2a-(2ax+b)-6(ax^2+bx+c) = 3x^2-5x+4\,,$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -6a = 3\\ -2a-6b=-5\\ 2a-b-6c=4, \end{cases}$$

che ha come soluzione $a=-1/2$, $b=1$, $c=-1$. La soluzione generale dell'equazione è allora

$$y(x) = C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-\frac{x^2}{2}+x-1\,.$$



c. Derivando si ottiene

$$y'(x) = -2C_1e^{-2x}+3C_2e^{3x}-x+1\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0)=-1$ e $y'(0)=0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1+C_2-1=-1\\ -2C_1+3C_2+1=0, \end{cases}$$

quindi $C_1=-C_2=1/5$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-2x}-\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{x^2}{2}+x-1\,.$$