Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 3 settembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{\log(\cos x + \operatorname{sen} x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^2 - \operatorname{sen} x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{\arctan(xe^x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^3 + 2x^4}$.

2. Data la funzione $f(x) := 2x - \log|e^x - 1| - \log 4$, si studino

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità e derivabilità;
c. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
d. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità;
e. il segno della funzione; in particolare individuare gli zeri di f.
f. Si tracci infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{t^3 - 2}$ (equivalente a $2 + x^2 = t^3$), l'integrale indefinito

$$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{2+x^2}\, dx.$$

4. Data la funzione di due variabili $f(x, y) := \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x-1}\right)$, determinare e rappresentare nel piano cartesiano:

a. il dominio di f;
b. le linee di livello di f.

5. Data l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 5y = 12xe^{-x}$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$.

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 8, 4+4, 2+4+2.

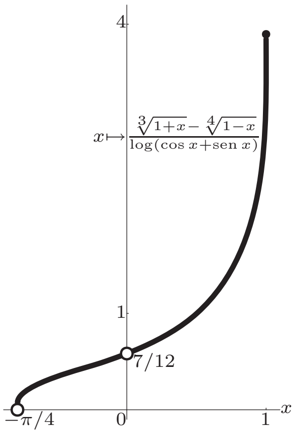
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

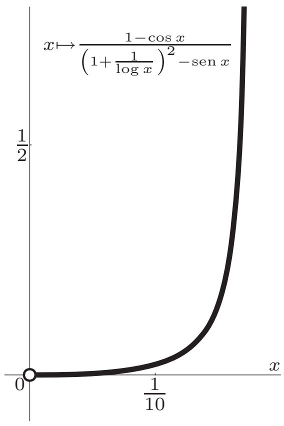
Analisi Matematica

Prova Scritta del 3 settembre 2001

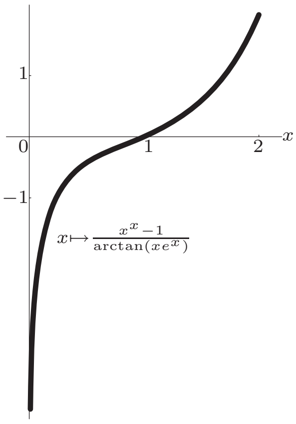
Svolgimento



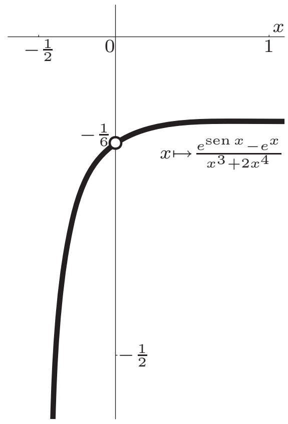
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{\log(\cos x+\operatorname{sen} x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}}}{\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x+\operatorname{sen} x}} = \frac{1/3+1/4}{1} = \frac{7}{12}.$$

1. b Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^2-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

1. c. Ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$, si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\arctan(xe^x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(\log x)}{\frac{e^x+xe^x}{1+(xe^x)^2}} = \left[\frac{-\infty}{1}\right] = -\infty\,.$$

1. d. Si può applicare l'Hôpital tre volte (forma indeterminata 0/0):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{x^3+2x^4} &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{3x^2+8x^3} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x e^{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{6x+24x^2} = \\ &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x e^{\operatorname{sen} x}-3\operatorname{sen} x\cos x e^{\operatorname{sen} x}-\cos x e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{6+48x} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Alternativamente, osservato che $(\operatorname{sen} x - x) \to 0$ e ricordando i limiti

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6},$$

il secondo dei quali può essere verificato con l'Hôpital, si poteva procedere nel seguente modo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{x^3+2x^4}=\lim_{x\to 0}\Big(e^x\frac{e^{\operatorname{sen} x-x}-1}{\operatorname{sen} x-x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}\cdot\frac{1}{1+2x}\Big)=-\frac{1}{6}.$$

2. a+b. Il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. La formula che definisce la funzione si può riscrivere in diversi modi, uno più comodo per $x\to-\infty$ e l'altro per $x\to+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\Big(\frac{e^{2x}}{4|e^x-1|}\Big)=2x-\log 4\big|e^x-1\big|= \\ &= \log\Big|\frac{e^x}{4(1-e^{-x})}\Big|=x-\log 4\big|1-e^{-x}\big|\,. \end{aligned}$$

Perciò si ricava che

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\overbrace{\log 4|\underbrace{1-e^{-x}}_{\to 1}|}^{\to\log 4}\Big)=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big(2x-\overbrace{\log 4|\underbrace{e^{x}-1}_{\to -1}|}^{\to\log 4}\Big)=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\Big(2x-\overbrace{\log 4\,\underbrace{|e^{x}-1|}_{\to 0^+}}^{\to -\infty}\Big)=+\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto. Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log 4|1-e^{-x}|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\Big(1-\frac{\overbrace{\log 4|1-e^{-x}|}^{\to\log 4}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}\Big)=1\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\big(x-\log 4|1-e^{-x}|\big)-x\Big)=\lim_{x\to+\infty}-\log 4\big|1-e^{-x}\big|=-\log 4\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\log 4|e^{x}-1|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\Big(2-\frac{\overbrace{\log 4|e^{x}-1|}^{\to\log 4}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\Big)=2\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-2x\big)=\lim_{x\to-\infty}\Big(\big(2x-\log 4|e^{x}-1|\big)-2x\Big)=\lim_{x\to-\infty}-\log 4|e^{x}-1|=-\log 4\,,$$

.

si ha che la retta $y=x-\log 4$ è un asintoto a $+\infty$, mentre la retta $y=2x-\log 4$ è asintoto a $-\infty$.

2. c. Ricordando che la derivata di $x\mapsto\log|x|$ è $1/x$ sia per $x>0$ che per $x<0$, non c'è bisogno di distinguere i due casi del valore assoluto nel calcolare la derivata prima di f:

$$f'(x)=2-\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x=\frac{e^x-2}{e^x-1}\,.$$

Il segno di $f'(x)$ è presto trovato studiando i segni di numeratore e denominatore:

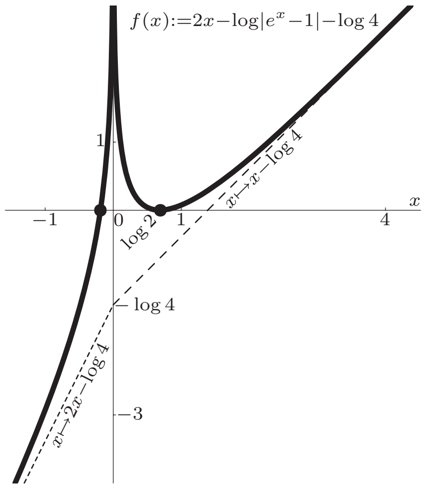
$$f'(x)\begin{cases}>0 & \text{se } x<0 \text{ oppure } x>\log 2,\\ =0 & \text{se } x=\log 2,\\ <0 & \text{se } 0<x<\log 2.\end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]-\infty,0[$ e su $]\log 2,+\infty[$, ed è decrescente su $]0,\log 2[$. In $x=\log 2$ la funzione ha un minimo locale.

2. d. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)-(e^x-2)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^2} =$$
$$= \frac{e^x}{(e^x-2)^2} > 0\,,$$

quindi la funzione è sempre convessa sul dominio.



2. f. Per $x>0$ si ha che

$$f(x) = \log\frac{e^{2x}}{4|e^x-1|} = \log\frac{e^{2x}}{4(e^x-1)}\,.$$

Quindi

$$f(x) \lesseqgtr 0 \iff \log\frac{e^{2x}}{4(e^x-1)} \lesseqgtr 0 \iff \frac{e^{2x}}{4(e^x-1)} \lesseqgtr e^0 = 1 \iff$$
$$\iff \frac{e^{2x}-4e^x+4}{4(e^x-1)} \lesseqgtr 0 \iff \frac{(e^x-2)^2}{4(e^x-1)} \lesseqgtr 0\,.$$

Essendo un quadrato, il numeratore $(e^x-2)^2$ è sempre >0 eccetto quando si annulla, cioè per $x=\log 2$. Il denominatore è >0 nella nostra ipotesi che $x>0$.
Per $x<0$ si ha che

$$f(x) = \log\frac{e^{2x}}{4|e^x-1|} = \log\frac{e^{2x}}{-4(e^x-1)} = \log\frac{e^{2x}}{4(1-e^x)}\,.$$

Quindi

$$f(x) \lesseqgtr 0 \iff \log\frac{e^{2x}}{4(1-e^x)} \lesseqgtr 0 \iff \frac{e^{2x}}{4(1-e^x)} \lesseqgtr e^0 = 1 \iff$$
$$\iff \frac{e^{2x}+4e^x-4}{4\underbrace{(1-e^x)}_{>0 \text{ se } x<0}} \lesseqgtr 0 \iff e^{2x}+4e^x-4 \lesseqgtr 0\,.$$

Ponendo $t=e^x$ il numeratore dell'ultima disequazione diventa t^2+4t-4, che ha come radici $t=-2\pm\sqrt{4+4}=-2\pm\sqrt{8}$, che sono una negativa e l'altra fra 0 e 1:

$$-2-\sqrt{8}\approx -4{,}82843\,,\qquad -2+\sqrt{8}\approx 0{,}828427\,.$$

Scomponendo in fattori $t^2+4t-4=(t-(-2-\sqrt{8}))(t-(-2+\sqrt{8}))$ possiamo risolvere la disequazione:

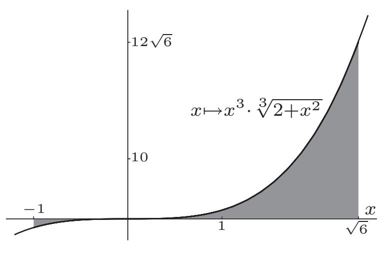
$$f(x)\lesseqgtr 0 \iff e^{2x}+4e^x-4 = \overbrace{\bigl(e^x-(-2-\sqrt{8})\bigr)}^{>0 \text{ sempre}}\bigl(e^x-(-2+\sqrt{8})\bigr) \lesseqgtr 0 \iff$$
$$\iff e^x-(-2+\sqrt{8}) \lesseqgtr 0 \iff x \lesseqgtr \log(-2+\sqrt{8}) \approx -0{,}188226\,.$$

Riassumendo, il segno di $f(x)$ è come segue:

$$f(x)\begin{cases} >0 & \text{se } \log(-2+\sqrt{8})<x<0 \text{ oppure } 0<x<\log 2 \text{ oppure } x>\log 2,\\ =0 & \text{se } x=\log(-2+\sqrt{8}) \text{ oppure } x=\log 2,\\ <0 & \text{se } x<\log(-2+\sqrt{8}).\end{cases}$$

3. Dalla relazione $2+x^2=t^3$ si ha che $2x\,dx=3t^2\,dt$. Perciò $2x^3\,dx=(t^3-2)3t^2\,dt$ e quindi

$$\int_{-1}^{\sqrt{6}} x^3\cdot\sqrt[3]{2+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_{\sqrt[3]{3}}^{2} t(t^3-2)3t^2\,dt = \frac{3}{2}\int_{\sqrt[3]{3}}^{2}(t^6-2t^3)\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}\Bigl[\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{2}\Bigr]_{\sqrt[3]{3}}^{2} = \frac{3}{2}\Bigl[\frac{t^4(2t^3-7)}{14}\Bigr]_{\sqrt[3]{3}}^{2} = \frac{108}{7}+\frac{9\sqrt[3]{3}}{28}\,.$$



Si poteva anche trovare una primitiva integrando prima per parti e poi con la sostituzione $u = x^2$:

$$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \underbrace{(2+x^2)^{1/3} 2x\,dx}_{=d(\frac{3}{4}(2+x^2)^{4/3})} = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \frac{3}{4}(2+x^2)^{4/3} - \int \frac{3}{4}\underbrace{(2+x^2)^{4/3}}_{=(2+u)^{4/3}} \cdot \underbrace{2x\,dx}_{=du}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x^2(2+x^2)^{4/3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}(2+u)^{7/3}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}x^2(2+x^2)^{4/3} - \frac{9}{56}(2+x^2)^{7/3}\,.$$

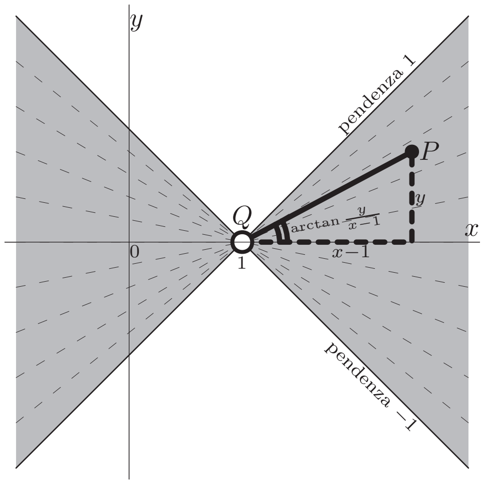
4. a. Poiché l'arcoseno è definito su $[-1, 1]$, il dominio della funzione è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \neq 1$ e

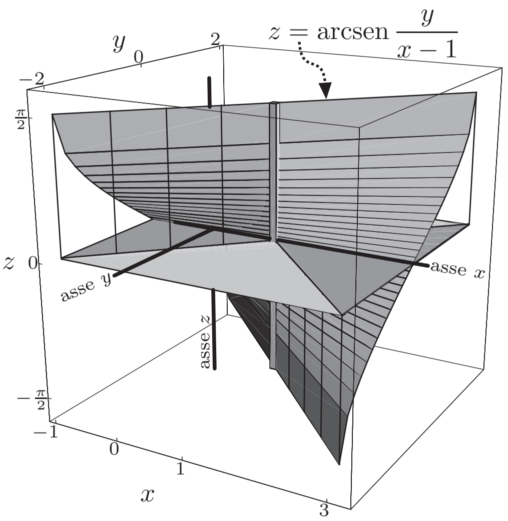
$$-1 \leq \frac{y}{x-1} \leq 1\,,$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y-x+1}{x-1} \leq 0, \\ \dfrac{y+x-1}{x-1} \geq 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione può essere interpretata geometricamente nel seguente modo: posti $Q := (1, 0)$ e $P := (x, y)$, il rapporto $\frac{y}{x-1}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta congiungente P e Q. Il dominio della funzione è allora costituito dall'unione di tutte le rette del piano passanti per il punto Q ed aventi coefficiente angolare compreso tra -1 ed 1 (a cui, però, va tolto il punto Q).





b. L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione

$$f(x, y) = k\,.$$

Se $|k| > \pi/2$ tale insieme è vuoto, altrimenti coincide con l'insieme delle soluzione dell'equazione

$$\frac{y}{x-1} = \operatorname{sen} k\,,$$

che per quanto visto sopra rappresenta la retta passante per il punto Q e di coefficiente angolare $\operatorname{sen} k$, a cui va tolto il punto Q.

5. a. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x}.$$

b. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = (ax + b)e^{-x}$. Si ha $\bar{y}'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$, $\bar{y}''(x) = (ax + b)e^{-x} - 2ae^{-x}$. e quindi $\bar{y}$ dovrà soddisfare

$$(ax + b)e^{-x} - 2ae^{-x} - 6(ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}) + 5(ax + b)e^{-x} = 12xe^{-x}\,,$$

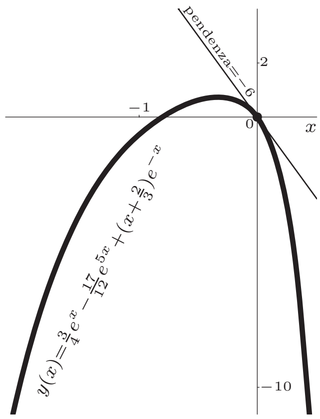
da cui si ricava il sistemino lineare

$$\begin{cases} 12a = 12, \\ 12b - 8a = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = 1$, $b = 2/3$. La soluzione generale dell'equazione differenziale è allora

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \Big(x + \frac{2}{3}\Big) e^{-x} \,.$$

c. Derivando si ottiene



$$y'(x) = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} + e^{-x} - \Big(x + \frac{2}{3}\Big) e^{-x}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = -6$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 2/3 = 0, \\ y'(0) = C_1 + 5C_2 + 1/3 = -6, \end{cases}$$

che risolto dà $C_1 = 3/4$, $C_2 = -17/12$. La soluzione cercata dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{3}{4} e^x - \frac{17}{12} e^{5x} + \Big(x + \frac{2}{3}\Big) e^{-x} \,.$$