Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 20 luglio 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{\sqrt{1+x^3} - 1}$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \operatorname{sen} x - 2\cos x}{3e^{\arctan x} - x \log x}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \arctan x}$ (d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - 2x^2}{e^{x^2} - \cos x}$.

2. Data la funzione $f(x) := (x+2)e^{1/x}$, si studi

a. il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b. la continuità e derivabilità;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare, ad esempio usando il metodo per parti, il seguente integrale definito

$$\int_0^1 x \operatorname{arcsen}(x^2)\, dx .$$

4. Si studi la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n+1} .$$

5. Data l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' = \frac{1}{x} y + x^2 + 1 \qquad \text{per } x > 0 ,$$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare, utilizzando per esempio la formula risolutiva, la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica la condizioni iniziale $y(1) = 0$.

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 8, 8, 2+4+2.

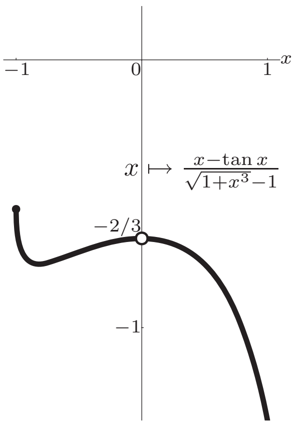
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

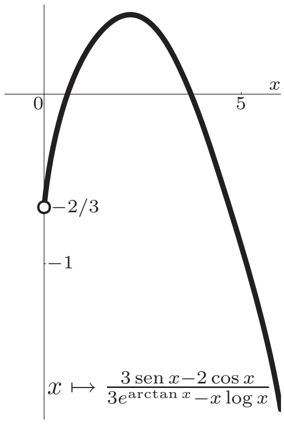
Analisi Matematica

Prova Scritta del 20 luglio 2001

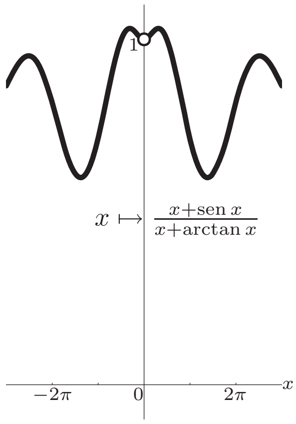
Svolgimento



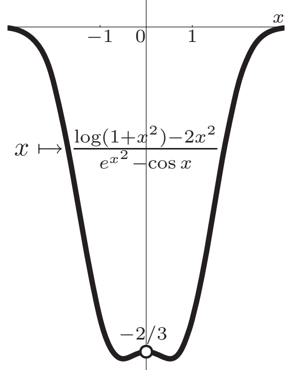
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{\sqrt{1+x^3}-1} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\Big/\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,x}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^3}}{\cos^2 x}\right) = -\frac{2}{3}.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\,\mathrm{sen}\,x-2\cos x}{3e^{\arctan x}-x\log x} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}.$$

c. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\mathrm{sen}\,x}{x+\arctan x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\frac{1}{1+x^2}} = 1.$$

d. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-2x^2}{e^{x^2}-\cos x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}-4x}{2xe^{x^2}+\mathrm{sen}\,x} = -\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{2xe^{x^2}+\mathrm{sen}\,x} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{2+12x}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\cos x} = -\frac{2}{3}.$$

Alternativamente, con piccole modifiche e dividendo per x^2, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-2x^2}{e^{x^2}-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}-2}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1-2}{1+1/2} = -\frac{2}{3}.$$

2. a+b. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

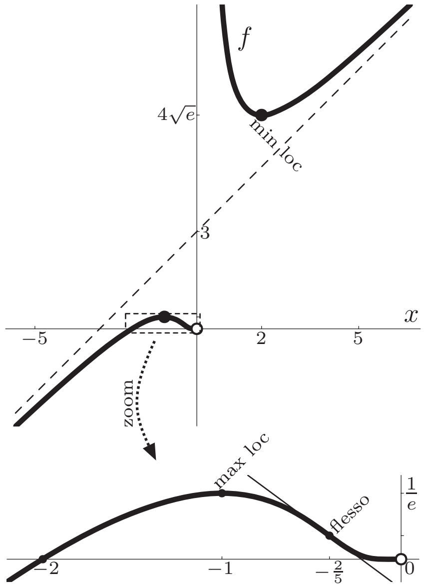
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto. Osservando che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} + 2e^{1/x} \Big) = 3,$$

si ha che la retta $y = x + 3$ è un asintoto sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

c. Banalmente si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq -2$, $x \neq 0$.



d. La derivata prima è

$$f'(x) = \Big(1 - \frac{x+2}{x^2}\Big) e^{1/x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x}.$$

Si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 - x - 2 > 0$ ovvero se $x > 2$ oppure $x < -1$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty, -1[$ e su $]2, +\infty[$, mentre è decrescente su $]-1, 0[$ e su $]0, 2[$. In $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$ ammette un massimo ed un minimo relativo, rispettivamente. Si osserva infine che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \Big(-\frac{x^2 - (x+2)2x}{x^4} - \frac{x^2 - x - 2}{x^4} \Big) e^{1/x} = \frac{5x + 2}{x^4} e^{1/x},$$

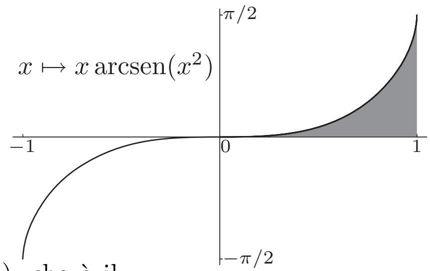
ottenendo che

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -2/5, \\ = 0 & \text{se } x = -2/5, \\ > 0 & \text{se } -2/5 < x < 0 \text{ o } x > 0. \end{cases}$$

La funzione è quindi convessa su $]-2/5, 0[$ e su $]0, +\infty[$, ed è concava su $]-\infty, -2/5[$. In $x = -2/5$ ammette un flesso.

3. Per parti:

$$\int_0^1 x \operatorname{arcsen}(x^2)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}(x^2) \Big]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}\, d(x^4) =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \Big[2\sqrt{1 - x^4} \Big]_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}.$$



4. Il termine generale della serie dei valori assoluti è asintotico a $\pi/(2n)$, che è il termine generale di una serie divergente. Quindi la serie data diverge assolutamente. Studiamo la convergenza semplice col criterio di Leibniz: la serie è a segni alterni, e inoltre $a_n := (-1)^n (\arctan n)/(n+1) \to 0$. Rimane da verificare se $|a_n|$ è definitivamente decrescente. Dalla tabella numerica qui accanto sembra che in effetti $|a_n|$ sia decrescente per $n \geq 1$. Per la dimostrazione formale è sufficiente provare che la funzione associata $f(x) := (\arctan x)/(x+1)$ è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{1+x^2} - \arctan x}{(x+1)^2} = \frac{1 + x - (1 + x^2) \arctan x}{(1 + x^2)(x+1)^2},$$

il cui denominatore è sempre > 0, mentre il numeratore va a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi da un certo $\bar{x}$ in poi la derivata prima f' sarà negativa e dunque f decrescente. Applicando il criterio di Leibniz si conclude che la serie è convergente.

n	$a_n \approx$
0	0,000000
1	−0,392699
2	+0,369050
3	−0,312261
4	+0,265164
5	−0,228900
6	+0,200807
7	−0,178612
8	+0,160716
9	−0,146014
10	+0,133739

5. a. L'equazione omogenea associata è

$$y' = \frac{1}{x} y\,, \quad \text{che è della forma } y' = a(x)y \text{ con } a(x) := 1/x.$$

Detta $A(x) := \log x$ una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$, la soluzione generale dell'omogenea associata è (sempre per $x > 0$)

$$y_o(x) = ce^{A(x)} = ce^{\log x} = cx,$$

dove c è una costante.

b. Per la formula risolutiva la soluzione generale dell'equazione è per $x > 0$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int e^{-A(x)}(x^2+1)\,dx\right) = x\left(c + \int \frac{x^2+1}{x}\,dx\right) =$$
$$= x\left(c + \frac{x^2}{2} + \log x\right) = cx + \frac{x^3}{2} + x\log x.$$

c. Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$0 = y(1) = c + \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = -\frac{1}{2},$$

perciò la soluzione cercata è

$$\bar{y}(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + x\log x.$$