Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 6 luglio 2001

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Risolvere i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x - x\,\mathrm{sen}(2x)}{1+x^2-\cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{\log x}}-2x\arctan\sqrt{x}}{(x-\mathrm{sen}\,x)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2+3x^2-2\cos x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4+1}}{\log(2e^{x^2}+1)}$.

2. Data la funzione $f(x) = 3+\log x+\dfrac{2}{1+\log x}$, si studi

a. il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio;
b. la continuità e derivabilità;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito facendo uso della sostituzione $y = e^x$:

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx\,.$$

4. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{4x^2+2x-7}{\sqrt{3x^5+5x^2+1}}\,dx\,.$$

5. Data l'equazione differenziale $y''+4y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Compito A

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 8, 4, 2+4+3.

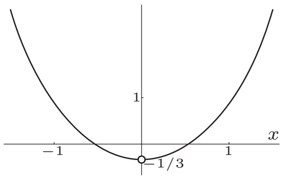
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

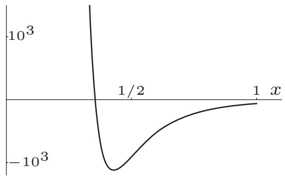
Analisi Matematica, compito A

Prova Scritta del 6 luglio 2001

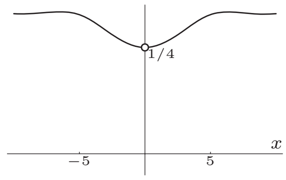
Svolgimento



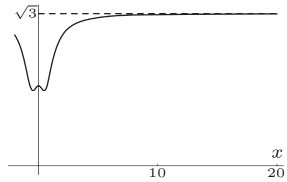
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - x\,\mathrm{sen}(2x)}{1 + x^2 - \cos x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}(2x) - 2x\cos(2x)}{2x + \mathrm{sen}\,x} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x - 4\cos(2x) + 4x\,\mathrm{sen}(2x)}{2 + \cos x} = -\frac{1}{3}\,.$$

Alternativamente, con piccole modifiche e dividendo per x^2, ci si riporta a limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2} - 2\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x}}{1 + \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1 + 1/2 - 2}{1 + 1/2} = -\frac{1}{3}\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\log x}} - 2x \arctan\sqrt{x}}{\underbrace{(x - \mathrm{sen}\,x)^2}_{\geq 0}} = \left[\frac{1-0}{0^+}\right] = +\infty\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2 + 3x^2 - 2\cos x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{6x + 2\,\mathrm{sen}\,x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{6 + 2\cos x} = \frac{1}{4}\,.$$

Alternativamente, dividendo per x^2, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2 + 3x^2 - 2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3 + 2\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}\,.$$

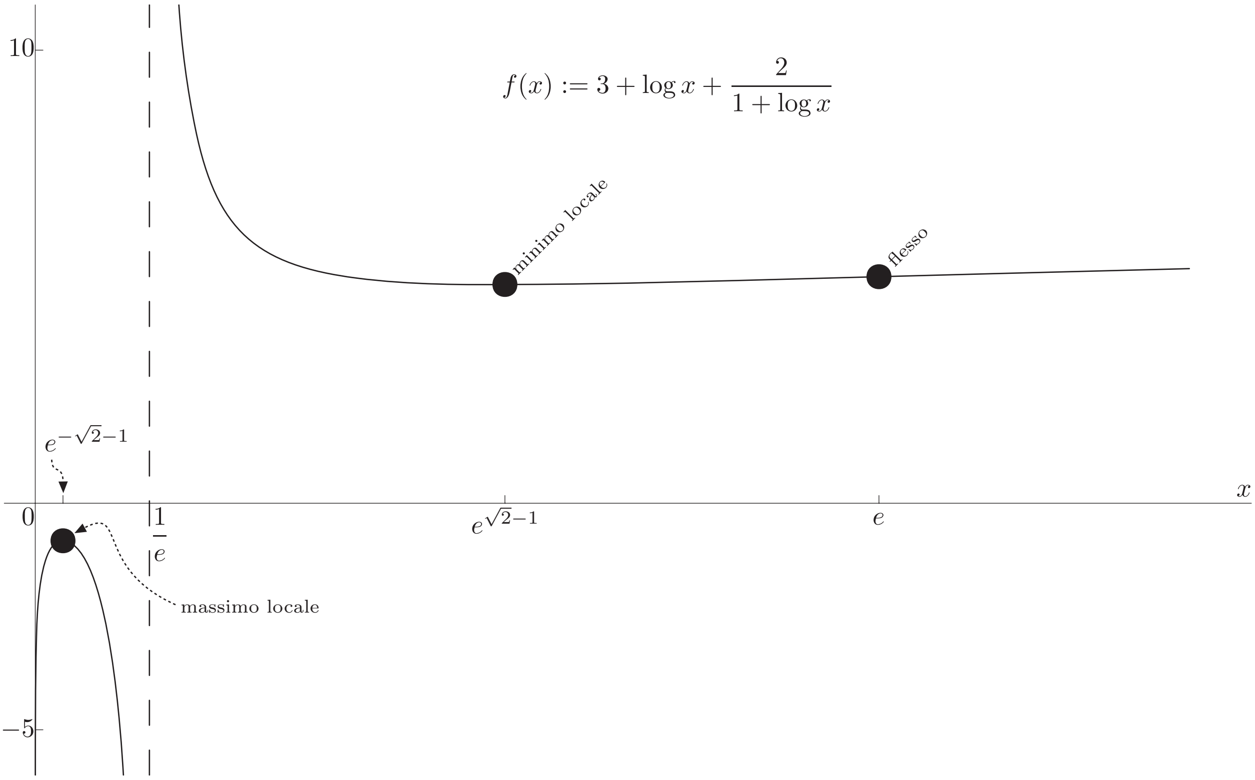
d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4+1}}{\log(2e^{x^2}+1)} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{12x^3}{2\sqrt{3x^4+1}} \Big/ \frac{4xe^{x^2}}{2e^{x^2}+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^4}{3x^4+1}}\left(2 + \frac{1}{e^{x^2}}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,2 = \sqrt{3}\,.$$

Alternativamente si poteva procedere nel seguente modo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4+1}}{\log(2e^{x^2}+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sqrt{3 + 1/x^4}}{x^2 + \log(2 + 1/e^{x^2})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3+1/x^4}}{1 + \frac{\log(2+1/e^{x^2})}{x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{1+0}\,.$$



2. a+b Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1/e\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/e)^\pm} g(x) = \pm\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto.

c. Essendo

$$f(x) = \frac{\log^2 x + 4\log x + 5}{1 + \log x}\,,$$

e poiché il numeratore è sempre positivo (infatti $z^2 + 4z + 5$ è > 0 per $z = 0$ e non si annulla mai perché il discriminante è < 0) si ha che $f(x)$ è positiva se $x > 1/e$ mentre $f(x)$ è negativa se $x < 1/e$.

d. La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(1+\log x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{2}{(1+\log x)^2}\Big) = \frac{(1+\log x)^2 - 2}{x(1+\log x)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $(1 + \log x)^2 - 2 \geq 0$ ovvero se $\log x \geq \sqrt{2} - 1$ oppure $\log x \leq -1 - \sqrt{2}$. La funzione è dunque crescente su $]0, e^{-1-\sqrt{2}}[$ e su $]e^{\sqrt{2}-1}, +\infty[$, mentre è decrescente su $]e^{-1-\sqrt{2}}, e^{-1}[$ e su $]e^{-1}, e^{\sqrt{2}-1}[$. I punti $x_0 = e^{-1-\sqrt{2}}$ e $x_1 = e^{\sqrt{2}-1}$ sono di massimo e di minimo locale, rispettivamente.

e. Derivando una delle forme della derivata prima si ottiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2}\Big(1 - \frac{2}{(1+\log x)^2}\Big) + \frac{1}{x}\cdot\frac{4}{(1+\log x)^3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-(\log x)^3 - 3(\log x)^2 - \log x + 5}{x^2(1+\log x)^3} = \\ &= \frac{-z^3 - 3z^2 - z + 5}{x^2(1+z)^3}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $z := \log x$. Si vede ad occhio che il polinomio di terzo grado $-z^3 - 3z^2 - z + 5$ ha 1 come radice. Scomponiamo il polinomio con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & & -1 & -4 & -5 \\ \hline & -1 & -4 & -5 & 0 \end{array}$$

Quindi $-z^3 - 3z^2 - z + 5 = (z-1)(-z^2 - 4z - 5) = -(z-1)(z^2+4z+5)$. Il polinomio z^2+4z+5 è sempre > 0, come già visto sopra. Dunque

$$f''(x) = -\frac{(z-1)\overbrace{(z^2+4z+5)}^{>0}}{\underbrace{x^2}_{\geq 0}(z+1)^3}\,, \qquad \text{dove } z = \log x\,.$$

Il segno di $f''(x)$ è

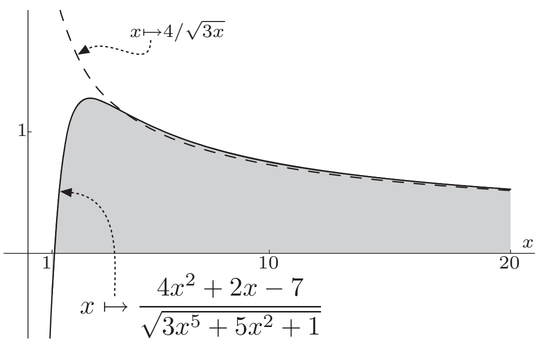
$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } -1 < z < 1, \text{ cioè se } e^{-1} < x < e^1, \\ = 0 & \text{se } z = 1, \text{ cioè se } x = e^1 = e, \\ < 0 & \text{se } z < -1 \text{ o } z > 1, \text{ cioè se } x < e^{-1} \text{ o } x > e. \end{cases}$$

La funzione è quindi convessa su $]1/e, e[$, concava su $]0, 1/e[$ e su $]e, +\infty[$, ed $x = e$ è un punto di flesso.

3. Osservando che $dx = \frac{1}{y}dy$ e che $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$, dai metodi risolutivi degli integrali di funzioni razionali si ha

$$\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\,dx = \int \frac{y-1}{(y-2)(y-3)}\,dy = \int \left(\frac{2}{y-3} - \frac{1}{y-2}\right) dy =$$
$$= 2\log|y-3| - \log|y-2| + c = 2\log|e^x - 3| - \log|e^x - 2| + c\,.$$

4. La funzione integranda è definita e continua su $[1, +\infty[$ e all'infinito è asintotica a $4x^2/\sqrt{3x^5} = 4/\sqrt{3x}$, il cui integrale diverge a $+\infty$. Quindi anche l'integrale dato diverge.



5. a. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 + 4$ che ha radici $\pm 2i$. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)\,,$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = x\big(a \operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x)\big)\,,$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = a\operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x) + 2x\big(a\cos(2x) - b\operatorname{sen}(2x)\big)\,,$$
$$y_p''(x) = 4a\cos(2x) - 4b\operatorname{sen}(2x) - 4x\big(a\operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x)\big)\,.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) + 4y_p(x) = 3\operatorname{sen}(2x)$ per ogni x, il che, svolti i conti, equivale a

$$4a\cos(2x) - (4b+3)\operatorname{sen}(2x) = 0 \quad \text{per ogni } x\,.$$

Ciò sarà vero se $a = 0$ e $b = -3/4$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = -\frac{3}{4}x\cos(2x)$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1\operatorname{sen}(2x) + C_2\cos(2x) - \frac{3}{4}x\cos(2x).$$

c. Derivando la soluzione generale si ottiene

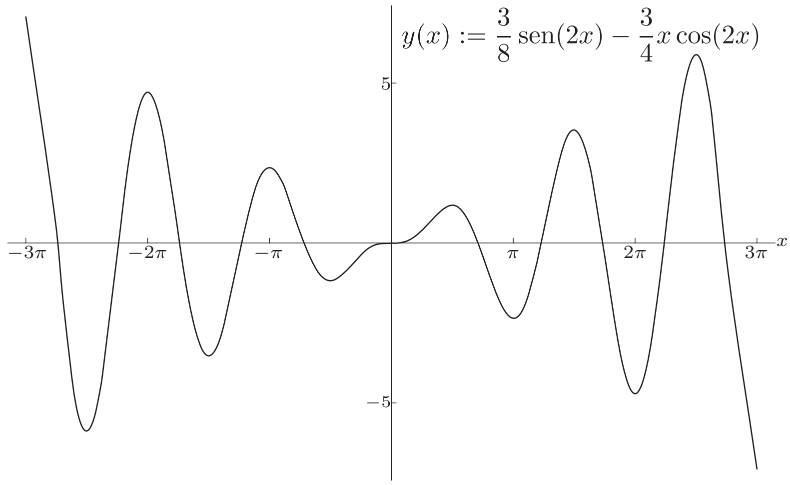
$$y'(x) = 2C_1 \cos(2x) - 2C_2 \,\mathrm{sen}(2x) - \frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{3}{2} x \,\mathrm{sen}(2x)\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ 2C_1 - 3/4 = 0. \end{cases}$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{3}{4} x \cos(2x).$$



Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Prova Scritta del 6 luglio 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - 2x\,\mathrm{sen}(2x)}{1 + 3x^2 - \cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\log x}} - 2\cos x}{(x - \tan x)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3 + 5x^2 - 3\cos x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+1}}{\log(5e^{x^2}+1)}$

2. Data la funzione $f(x) = 3 - \log x + \dfrac{2}{1 - \log x}$, si studi

a. il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio;
b. la continuità e derivabilità;
c. il segno della funzione;
d. la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto della funzione;
e. la derivata seconda e gli intervalli di convessità/concavità.
f. Si tracci l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito facendo uso della sostituzione $y = e^x$:

$$\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}\,dx\,.$$

4. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{\sqrt{x^9 + 3x^5 + 4}}\,dx\,.$$

5. Data l'equazione differenziale $y'' + 9y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$,

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,
b. trovare la soluzione generale,
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Compito B

Punti: 2+2+2+2, 2+1+2+2+2+2, 8, 4, 2+4+3.

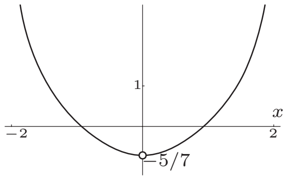
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

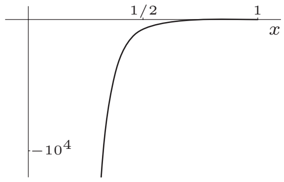
Analisi Matematica, compito B

Prova Scritta del 6 luglio 2001

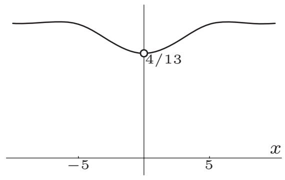
Svolgimento



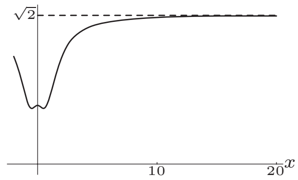
Esercizio 1. a.



Esercizio 1. b.



Esercizio 1. c.



Esercizio 1. d.

1. a. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - 2x\,\mathrm{sen}(2x)}{1 + 3x^2 - \cos x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \mathrm{sen}\, x - 2\,\mathrm{sen}(2x) - 4x\cos(2x)}{6x + \mathrm{sen}\, x} =$$
$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x - 8\cos(2x) + 8x\,\mathrm{sen}(2x)}{6 + \cos x} = -\frac{5}{7}$$

Alternativamente, con piccole modifiche e dividendo per x^2, ci si riporta a limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2} - 4\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x}}{3 + \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1 + 1/2 - 4}{3 + 1/2} = -\frac{5}{7}\,.$$

b. Il limite non è in forma indeterminata e vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/\log x} - 2\cos x}{\underbrace{(x - \tan x)^2}_{\geq 0}} = \left[\frac{1-2}{0^+}\right] = -\infty\,.$$

c. Si può applicare l'Hôpital due volte (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3 + 5x^2 - 3\cos x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4x}{10x + 3\,\mathrm{sen}\, x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4}{10 + 3\cos x} = \frac{4}{13}\,.$$

Alternativamente, dividendo per x^2, si ottiene

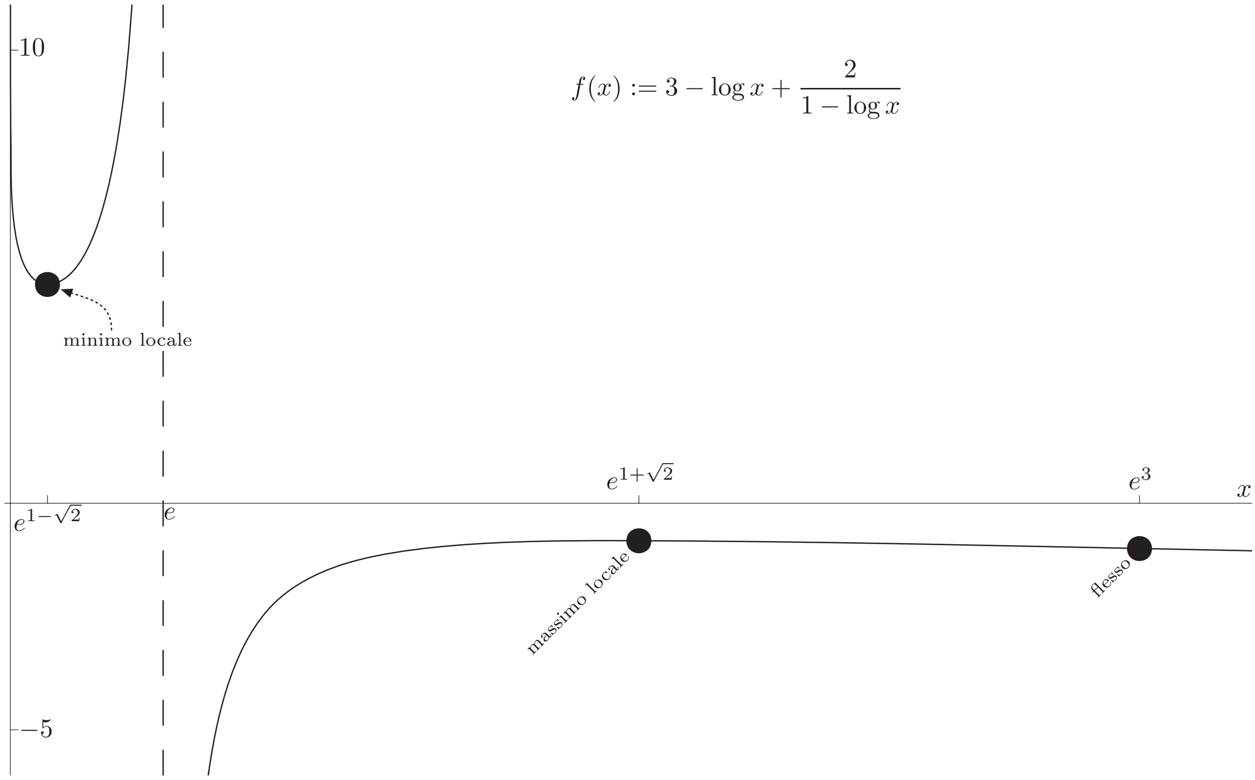
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3 + 5x^2 - 3\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5 + 3\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2}{5 + 3/2} = \frac{4}{13}\,.$$

d. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^4+1}}{\log(5e^{x^2}+1)} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+1}} \Big/ \frac{10xe^{x^2}}{5e^{x^2}+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x^4}{2x^4+1}}\left(5 + \frac{1}{e^{x^2}}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 5 = \sqrt{2}\,.$$

Alternativamente si poteva procedere nel seguente modo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^4+1}}{\log(5e^{x^2}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{2+1/x^4}}{x^2 + \log(5 + 1/e^{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+1/x^4}}{1 + \frac{\log(5+1/e^{x^2})}{x^2}} = \frac{\sqrt{2+0}}{1+0}\,.$$



2. a+b Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to e^\pm} g(x) = \mp\infty\,.$$

Quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto.

c. Essendo

$$f(x) = \frac{\log^2 x - 4\log x + 5}{1 - \log x}\,,$$

e poiché il numeratore è sempre positivo (infatti $z^2 - 4z + 5 > 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$) si ha che $f(x)$ è positiva se $x < e$ mentre è negativa se $x > e$.

d. La derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(1-\log x)^2}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{(1-\log x)^2} - 1\right) = \frac{2 - (1-\log x)^2}{x(1-\log x)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2 \geq (1-\log x)^2$ ovvero se $1 - \sqrt{2} \leq \log x \leq \sqrt{2} + 1$. La funzione è dunque crescente su $]e^{1-\sqrt{2}}, e[$ e su $]e, e^{1+\sqrt{2}}[$, mentre è decrescente su $]0, e^{1-\sqrt{2}}[$ e su $]e^{1+\sqrt{2}}, +\infty[$. I punti $x_0 = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x_1 = e^{1+\sqrt{2}}$ sono di minimo ed di massimo relativo, rispettivamente.

e. Derivando una delle forme della derivata prima si ottiene

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{(1-\log x)^2} - 1\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{4}{(1-\log x)^3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{z^3 - 3z^2 + z - 3}{x^2(z-1)^3}\,,$$

dove abbiamo posto $z(x) = \log x$. Il polinomio $z^3 - 3z^2 + z - 3$ si può fattorizzare così:

$$z^3 - 3z^2 + z - 3 = z^2(z-3) + (z-3) = (z-3)(z^2+1)\,.$$

Quindi

$$f''(x) = \frac{(z-3)\overbrace{(z^2+1)}^{>0}}{\underbrace{x^2}_{\geq 0}(z-1)^3}\,, \qquad \text{dove } z = \log x\,.$$

Il segno di $f''(x)$ è

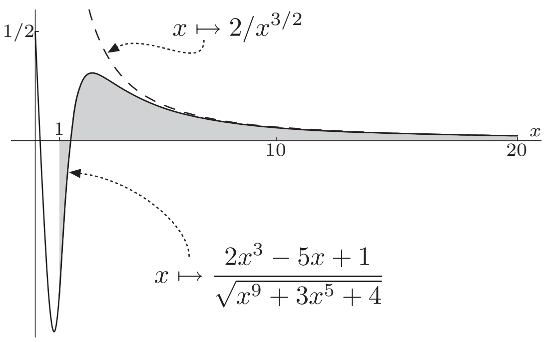
$$f''(x)\begin{cases} <0 & \text{se } 1<z<3, \text{ cioè se } e^1<x<e^3,\\ =0 & \text{se } z=3, \text{ cioè se } x=e^3,\\ >0 & \text{se } z<1 \text{ o } z>3, \text{ cioè se } x<e^1 \text{ o } z>e^3. \end{cases}$$

La funzione è quindi concava su $]e,e^3[$, convessa su $]0,e[$ e su $]e^3,+\infty[$, ed $x=e^3$ è un punto di flesso.

3. Osservando che $dx = \frac{1}{y}dy$ e che $y^2-5y+6=(y-1)(y-5)$, si ha

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-6e^x+5}\,dx = \int \frac{y-1}{(y-1)(y-5)}\,dy = \log|y-5|+c = \log|e^x-5|+c\,.$$

4. La funzione integranda è definita e continua su $[1,+\infty[$ e all'infinito è asintotica a $2x^3/\sqrt{x^9} = 2/x^{3/2}$, il cui integrale è convergente all'∞. Quindi anche l'integrale dato converge.



5. a. Il polinomio caratteristico associato è λ^2+9 che ha radici $\pm 3i$. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1\,\text{sen}(3x) + C_2\cos(3x)\,,$$

con C_1, C_2 costanti.

b. La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = x\big(a\,\text{sen}(3x) + b\cos(3x)\big).$$

dove $a,b\in\mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = a\,\text{sen}(3x) + b\cos(3x) + 3x\big(a\cos(3x) - b\,\text{sen}(3x)\big)r\,,$$
$$y_p''(x) = 6a\cos(3x) - 6b\,\text{sen}(3x) - 9x\big(a\,\text{sen}(3x) + b\cos(3x)\big)\,.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) + 9y_p(x) = 2\,\text{sen}(3x)$ per ogni x, il che, svolti i conti, equivale a

$$6a\cos(3x) - (6b+2)\,\text{sen}(3x) = 0 \qquad \text{per ogni } x\,.$$

Ciò sarà vero se $a=0$ e $b=-1/3$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = -\frac{1}{3}x\cos(3x)$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1\,\text{sen}(3x) + C_2\cos(3x) - \frac{1}{3}x\cos(3x)\,.$$

c. Derivando si ottiene

$$y'(x) = 3C_1\cos(3x) - 3C_2\,\text{sen}(3x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + x\,\text{sen}(3x)\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ 3C_1 - 1/3 = 0\,. \end{cases}$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{9}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{1}{3}x\cos(3x)\,.$$