Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{3+2x^5}}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{1/3}\cdot(2-x)^{3/2}}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n+3}{3n+1}\Big)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^3-2}{2n^4+3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\operatorname{sen}(1/n)}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^{5/2}+1}{2n+5+n^3}$

3. Data l'equazione differenziale $y'-3y=2x^2+x$
a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y''-6y'+8y=e^{2x}$
a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;
b. trovare la soluzione generale;
c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\log(2-y)-\log(x-3)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=x^3+8y^3-2xy-5$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito A

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/7}\cdot(x-1)^{2/3}}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{3+5x^4+2x^9}}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5-1}{2n^7+2+5n^{11/2}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^3-1}{2n^4+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{n}{n^2+1}\Bigr)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\arctan n)^n}$

3. Data l'equazione differenziale $y' + 4y = x^2 + 2x$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x, y) = \log(y + 1) - \log(x - 1)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 2xy + 3$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito B

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/2} \cdot (x-2)^{2/3}}\, dx\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4+5x+12}}\, dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^3+1}{3n^4+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\arctan n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{4\sqrt{n}+n^2+7}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3n-2}{4n+5}\Big)^n$

3. Data l'equazione differenziale $y' + y = 3x^2 - x$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y'' - 8y' + 7y = e^x$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x, y) = \log(1 - y) - \log(x + 2)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 - 8y^3 + 2xy + 1$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito C

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{(a)} \quad \int_1^3 \frac{1}{(3-x)^{1/5}\cdot(3-x)^{2/7}}\,dx\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5+3x^3+2}}\,dx\,.$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sin(1/n)}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^{3/2}+2n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^3+3}{n^4+1}$

3. Data l'equazione differenziale $y'+2y=x^2+3x$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale.

4. Data l'equazione differenziale $y''-y'-2y=e^{2x}$

a. trovare la soluzione generale dell'omogenea associata;

b. trovare la soluzione generale;

c. trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

5. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x,y)=\log(y-3)-\log(1-x)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

6. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=8x^3-y^3+2xy-7$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Compito D

Punti: 2+2, 3+3+3+3, 1+3, 2+4+2, 4, 5.

Soluzioni dei Problemi del Compitino del 13 Giugno 2001

Tema A

1a) La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty)$. Poiché all'infinito f è asintotica a $1/\sqrt[6]{2x^5} = 1/(\sqrt[6]{2}x^{5/6})$ il cui integrale diverge all'∞ (essendo $5/6 < 1$), anche l'integrale dato diverge.

1b) Essendo

$$\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{1/3} \cdot (2-x)^{3/2}}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{11/6}}\, dx$$

per la teoria ($11/6 > 1$) segue che l'integrale diverge.

2a) Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

2b) Si osserva che la serie non converge assolutamente. Infatti il termine generale è asintotico a $3/(2n)$ che è termine generale di serie divergente. Per il criterio di asintoticità la serie diverge assolutamente. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: la serie è in effetti a segni alterni e di termine generale infinitesimo. Rimane solo da verificare che, detta $a_n = \frac{3n^3-2}{2n^4+3}$, si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine conviene introdurre la funzione $f(x) = \frac{3x^3-2}{2x^4+3}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{9x^2(2x^4+3) - (3x^3-2)8x^3}{(2x^4+3)^2} = x^2\frac{-6x^4+16x+27}{(2x^4+3)^2}$$

Il segno di f' è determinato da $P(x) = -6x^4+16x+27$ ed essendo $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ si ha che definitivamente per x sufficientemente grande $P(x)$, quindi $f'(x)$, sarà negativo. La funzione f risulta dunque decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi e ciò implica che $a_n \geq a_{n+1}$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Per il criterio di Leibniz la serie converge.

2c) Poiché la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\sin(1/n)} = 1$$

per il criterio necessario si conclude che la serie diverge.

2d) Il termine generale della serie è asintotico a $n^{5/2}/n^3 = 1/n^{1/2}$ la cui serie diverge, essendo $1/2 < 1$. Dunque anche la serie data diverge.

3) a) L'equazione omogenea associata è

$$z' - 3z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(x) = c\,e^{3x}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b) Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(x) = 2ax + b$ perciò

$$\bar{y}'(x) - 3y(x) = 2x^2 + x, \ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + x, \ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (2+3a)x^2+(1-2a+3b)x+(3c-b) = 0, \ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2 + 3a = 0 \\ 1 - 2a + 3b = 0 \\ 3c - b = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = -2/3$, $b = -7/9$, $c = -7/27$ perciò $\bar{y}(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{7}{27}$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{7}{27} + c\,e^{3x},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4) a) Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ che ha radici 2 e 4. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x},$$

con C_1, C_2 costanti.

b) La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = axe^{2x},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x} \qquad y_p''(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) - 6y_p'(x) + 8y_p(x) = e^{2x}$ per ogni x, il che, svolti i conti, equivale a

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - 6(ae^{2x} + 2axe^{2x}) + 8axe^{2x} = e^{2x}, \ \forall\, x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1 + 2a)e^{2x} = 0,$$

ovvero $a = -1/2$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = -\frac{x}{2}e^{2x}$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \frac{x}{2}e^{2x}.$$

c) Derivando si ottiene

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x} - xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 4C_2 - 1/2 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $C_1 = -C_2 = -3/4$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{3}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{4x} - \frac{x}{2}e^{2x}.$$

5) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 > y, \ x > 3\}.$$

Su tale insieme vale $f(x, y) = \log \frac{2-y}{x-3}$.

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x, y) = k$, ovvero $\log \frac{2-y}{x-3} = k$, equazione che ha sempre soluzione e che equivale a $\frac{2-y}{x-3} = e^k$ ovvero $y - 2 = e^k(3 - x)$. Ristretta al dominio $\mathcal{D}$, quest'ultima equazione rappresenta una semiretta. Al variare di k l'insieme di livello k descrive un fascio si semirette uscenti dal punto $(3, 2)$.

6) I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = 3x^2/2$ che sostituita all'interno della seconda fornisce $54x^4 - 2x = 0$ ovvero $x(27x^3 - 1) = 0$. I punti critici sono dunque $(0, 0)$ e $(1/3, 1/6)$. L'Hessiano è

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 48y \end{vmatrix} = 4(72xy - 1)$$

Essendo $H(0, 0) = -4 < 0$ e $H(1/3, 1/6) = 12 > 0$ si ha che $(0, 0)$ è un punto di sella mentre $(1/3, 1/6)$ è un punto di minimo relativo.

Tema B

1a) Essendo

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/7} \cdot (x-1)^{2/3}}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{17/21}}\, dx$$

per la teoria $(17/21 < 1)$ segue che l'integrale converge.

1b) La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty)$. Poiché all'infinito f è asintotica a $1/\sqrt[7]{2x^9} = 1/(\sqrt[7]{2}x^{9/7})$ il cui integrale converge all'∞ (essendo $9/7 > 1$), anche l'integrale dato converge.

2a) Il termine generale della serie è asintotico a $2n^5/2n^7 = 1/n^2$ la cui serie converge, essendo $2 > 1$. Dunque anche la serie data converge.

2b) Si osserva che la serie non converge assolutamente. Infatti il termine generale è asintotico a $3/(2n)$ che è termine generale di serie divergente. Per il criterio di asintoticità la serie diverge assolutamente. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: la serie è in effetti a segni alterni e di termine generale infinitesimo. Rimane solo da verificare che, detta $a_n = \frac{3n^3-1}{2n^4+1}$, si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine conviene introdurre la funzione $f(x) = \frac{3x^3-1}{2x^4+1}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{9x^2(2x^4+1) - (3x^3-1)8x^3}{(2x^4+1)^2} = x^2 \frac{-6x^4+8x+9}{(2x^4+1)^2}$$

Il segno di f' è determinato da $P(x) = -6x^4 + 8x + 9$ ed essendo $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ si ha che definitivamente per x sufficientemente grande $P(x)$, quindi $f'(x)$, sarà negativo. La funzione f risulta dunque decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi e ciò implica che $a_n \geq a_{n+1}$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Per il criterio di Leibniz la serie converge.

2c) Poiché la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 1$$

per il criterio necessario si conclude che la serie diverge.

2d) Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\arctan n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

3) a) L'equazione omogenea associata è

$$z' + 4z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(x) = c\,e^{-4x}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b) Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(x) = 2ax + b$ perciò

$$\bar{y}'(x) + 4y(x) = x^2 + 2x,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2ax+b) + 4(ax^2+bx+c) = x^2 + 2x,\ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (4a-1)x^2 + (2a+4b-2)x + (b+4c) = 0,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 4a - 1 = 0 \\ 2a + 4b - 2 = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = 1/4$, $b = 3/8$, $c = -3/32$ perciò $\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{32} + c\,e^{-4x},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4) a) Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha radici 2 e 3. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$

con C_1, C_2 costanti.

b) La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = axe^{3x},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x} \qquad y_p''(x) = 6ae^{3x} + 9axe^{3x}.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) - 5y_p'(x) + 6y_p(x) = e^{3x}$ per ogni x, il che equivale a

$$6ae^{3x} + 9axe^{3x} - 5(ae^{3x} + 3axe^{3x}) + 6axe^{3x} = e^{3x},\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a-1)e^{3x} = 0,$$

ovvero $a = 1$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = xe^{3x}$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + xe^{3x}.$$

c) Derivando si ottiene

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + 3xe^{3x} + e^{3x}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 3C_2 + 1 = 2 \end{cases}$$

che ha come soluzione $C_1 = -C_2 = -1$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -e^{2x} + e^{3x} + xe^{3x}.$$

5) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > -1,\ x > 1\big\}.$$

Su tale insieme vale $f(x,y) = \log \frac{y+1}{x-1}$.

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$, ovvero $\log \frac{y+1}{x-1} = k$, equazione che ha sempre soluzione e che equivale a $\frac{y+1}{x-1} = e^k$ ovvero $y + 1 = e^k(x-1)$. Ristretta al dominio $\mathcal{D}$, quest'ultima equazione rappresenta una semiretta. Al variare di k l'insieme di livello k descrive un fascio si semirette uscenti dal punto $(1, -1)$.

6) I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $x = 3y^2/2$ che sostituita all'interno della prima fornisce $54y^4 - 2y = 0$ ovvero $y(27y^3 - 1) = 0$. I punti critici sono dunque $(0,0)$ e $(1/6, 1/3)$. L'Hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 48x & -2 \\ -2 & 6y \end{vmatrix} = 4(72xy - 1)$$

Essendo $H(0,0) = -4 < 0$ e $H(1/6, 1/3) = 12 > 0$ si ha che $(0,0)$ è un punto di sella mentre $(1/6, 1/3)$ è un punto di minimo relativo.

Tema C

1a) Essendo

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/2} \cdot (x-2)^{2/3}}\, dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{7/6}}\, dx$$

per la teoria $(7/6 > 1)$ segue che l'integrale diverge.

1b) La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty)$. Poiché all'infinito f è asintotica a $1/\sqrt[5]{x^4} = 1/x^{4/5}$) il cui integrale diverge all'∞ (essendo $4/5 < 1$), anche l'integrale dato diverge.

2a) Si osserva che la serie non converge assolutamente. Infatti il termine generale è asintotico a $4/(3n)$ che è termine generale di serie divergente. Per il criterio di asintoticità la serie diverge assolutamente. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: la serie è in effetti a segni alterni e di termine generale infinitesimo. Rimane solo da verificare che, detta $a_n = \frac{4n^3+1}{3n^4+2}$, si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine conviene introdurre la funzione $f(x) = \frac{4x^3+1}{3x^4+2}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{12x^2(3x^4+2) - (4x^3+1)12x^3}{(3x^4+2)^2} = 12x^2 \frac{-x^4 - x + 2}{(3x^4+2)^2}$$

Il segno di f' è determinato da $P(x) = -x^4 - x + 2$ ed essendo $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ si ha che definitivamente per x sufficientemente grande $P(x)$, quindi $f'(x)$, sarà negativo. La funzione f risulta dunque decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi e ciò implica che $a_n \geq a_{n+1}$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Per il criterio di Leibniz la serie converge.

2b) Poiché la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{\arctan n}} = \frac{1}{2^{\pi/2}}$$

per il criterio necessario si conclude che la serie diverge.

2c) Il termine generale della serie è asintotico a $n^{1/2}/n^2 = 1/n^{3/2}$ la cui serie converge, essendo $3/2 > 1$. Dunque anche la serie data converge.

2d) Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{4n+5}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1$$

si ottiene che la serie converge.

3) a) L'equazione omogenea associata è

$$z' + z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(x) = c\,e^{-x}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b) Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(x) = 2ax + b$ perciò

$$\bar{y}'(x) + y(x) = 3x^2 - x,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 3x^2 - x,\ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (a-3)x^2 + (2a+b+1)x + (b+c) = 0,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a - 3 = 0 \\ 2a + b + 1 = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = 3$, $b = -7$, $c = 7$ perciò $\bar{y}(x) = 3x^2 - 7x + 7$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) = 3x^2 - 7x + 7 + c\,e^{-x},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4) a) Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - 8\lambda + 7$ che ha radici 1 e 7. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{7x},$$

con C_1, C_2 costanti.

b) La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = axe^x,$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = ae^x + axe^x \qquad y_p''(x) = 2ae^x + axe^x.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) - 8y_p'(x) + 7y_p(x) = e^x$ per ogni x, il che equivale a

$$2ae^x + axe^x - 8(ae^x + axe^x) + 7axe^x = e^x,\ \forall\, x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1 + 6a)e^x = 0,$$

ovvero $a = -1/6$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = -\frac{x}{6}e^x$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{7x} - \frac{x}{6}e^x.$$

c) Derivando si ottiene

$$y'(x) = C_1 e^x + 7C_2 e^{7x} - \frac{x}{6}e^x - \frac{1}{6}e^x.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 7C_2 - 1/6 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $C_1 = -C_2 = -7/36$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{7}{36}e^x + \frac{7}{36}e^{7x} - \frac{x}{6}e^x.$$

5) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 > y, \ x > -2\big\}.$$

Su tale insieme vale $f(x, y) = \log \frac{1-y}{x+2}$.
L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x, y) = k$, ovvero $\log \frac{1-y}{x+2} = k$, equazione che ha sempre soluzione e che equivale a $\frac{1-y}{x+2} = e^k$ ovvero $y - 1 = -e^k(x + 2)$. Ristretta al dominio $\mathcal{D}$, quest'ultima equazione rappresenta una semiretta. Al variare di k l'insieme di livello k descrive un fascio si semirette uscenti dal punto $(-2, 1)$.

6) I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -24y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = -3x^2/2$ che sostituita all'interno della seconda fornisce $-54x^4 + 2x = 0$ ovvero $x(1 - 27x^3) = 0$. I punti critici sono dunque $(0, 0)$ e $(1/3, -1/6)$. L'Hessiano è

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -48y \end{vmatrix} = -4(72xy + 1)$$

Essendo $H(0, 0) = -4 < 0$ e $H(1/3, -1/6) = 12 > 0$ si ha che $(0, 0)$ è un punto di sella mentre $(1/3, -1/6)$ è un punto di minimo relativo.

Tema D

1a) Essendo

$$\int_1^3 \frac{1}{(3 - x)^{1/5} \cdot (3 - x)^{2/7}}\, dx = \int_1^3 \frac{1}{(3 - x)^{17/35}}\, dx$$

per la teoria $(17/35 < 1)$ segue che l'integrale converge.

1b) La funzione integranda f è definita e continua su $[1, +\infty)$. Poiché all'infinito f è asintotica a $1/\sqrt[4]{x^5} = 1/x^{5/4})$ il cui integrale converge all'∞ (essendo $5/4 > 1$), anche l'integrale dato converge.

2a) Poiché la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin(1/n)}{n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n + 1} \cdot \frac{\sin(1/n)}{1/n} \right) = 1$$

per il criterio necessario si conclude che la serie diverge.

2b) Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2^n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0 < 1$$

si ottiene che la serie converge.

2c) Il termine generale della serie è asintotico a $n^{1/2}/(2n^2) = 1/(2n^{3/2})$ la cui serie converge. Dunque anche la serie data converge.

2d) Si osserva che la serie non converge assolutamente. Infatti il termine generale è asintotico a $2/n$ che è termine generale di serie divergente. Per il criterio di asintoticità la serie diverge assolutamente. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: la serie è in effetti a segni alterni e di termine generale infinitesimo. Rimane solo da verificare che, detta $a_n = \frac{2n^3+3}{n^4+1}$, si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine conviene introdurre la funzione $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^4+1}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^4+1) - (2x^3+3)4x^3}{(x^4+1)^2} = 2x^2\frac{-x^4-6x+3}{(x^4+1)^2}$$

Il segno di f' è determinato da $P(x) = -x^4 - 6x + 3$ ed essendo $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ si ha che definitivamente per x sufficientemente grande $P(x)$, quindi $f'(x)$, sarà negativo. La funzione f risulta dunque decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi e ciò implica che $a_n \geq a_{n+1}$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Per il criterio di Leibniz la serie converge.

3) a) L'equazione omogenea associata è

$$z' + 2z = 0$$

che dalla teoria ha soluzione generale $z(x) = c\,e^{-2x}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

b) Una soluzione particolare dell'equazione data può essere cercata nella forma $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché $\bar{y}$ sia soluzione. Si ha $\bar{y}'(x) = 2ax + b$ perciò

$$\bar{y}'(x) + 2y(x) = x^2 + 3x,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = x^2 + 3x,\ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (2a-1)x^2 + (2a+2b-3)x + (b+2c) = 0,\ \forall x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2a-1=0 \\ 2a+2b-3=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

sistema che ha come soluzione $a = 1/2$, $b = 1$, $c = -1/2$ perciò $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ è una soluzione particolare dell'equazione data. La soluzione generale, somma di una soluzione particolare e della generica soluzione dell'omogenea associata, è dunque

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + c\,e^{-2x},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4) a) Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - \lambda - 2$ che ha radici -1 e 2. Per la teoria si conclude che la generica soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x},$$

con C_1, C_2 costanti.

b) La soluzione generale dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare. Per trovare quest'ultima si osservi che la funzione a secondo membro dell'equazione è soluzione dell'omogenea associata. Dalla teoria segue che si può allora cercare una soluzione particolare tra le funzioni del tipo

$$y_p(x) = axe^{2x},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate

$$y_p'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x} \qquad y_p''(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}.$$

Affinché y_p sia soluzione dovrà accadere che $y_p''(x) - y_p'(x) - 2y_p(x) = e^{2x}$ per ogni x, il che equivale a

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - (ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 2axe^{2x} = e^{2x},\ \forall\, x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (3a-1)e^{2x} = 0,$$

ovvero $a = 1/3$. Quindi una soluzione particolare dell'equazione è $y_p(x) = \frac{x}{3}e^{2x}$ e la generica soluzione è allora

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{x}{3}e^{2x}.$$

c) Derivando si ottiene

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + \frac{2}{3}xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 2C_2 + 1/3 = 2 \end{cases}$$

che ha come soluzione $C_1 = -C_2 = -5/9$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{5}{9}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x} + \frac{x}{3}e^{2x}.$$

5) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 3,\ 1 > x\big\}.$$

Su tale insieme vale $f(x, y) = \log \frac{y-3}{1-x}$.

L'insieme di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x, y) = k$, ovvero $\log \frac{y-3}{1-x} = k$, equazione che ha sempre soluzione e che equivale a $\frac{y-3}{1-x} = e^k$ ovvero $y - 3 = e^k(1 - x)$. Ristretta al dominio $\mathcal{D}$, quest'ultima equazione rappresenta una semiretta. Al variare di k l'insieme di livello k descrive un fascio si semirette uscenti dal punto $(1, 3)$.

6) I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $x = 3y^2/2$ che sostituita all'interno della prima fornisce $54y^4 + 2y = 0$ ovvero $y(27y^3 + 1) = 0$. I punti critici sono dunque $(0, 0)$ e $(1/6, -1/3)$. L'Hessiano è

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 48x & 2 \\ 2 & -6y \end{vmatrix} = -4(72xy + 1)$$

Essendo $H(0, 0) = -4 < 0$ e $H(1/6, -1/3) = 12 > 0$ si ha che $(0, 0)$ è un punto di sella mentre $(1/3, 1/6)$ è un punto di minimo relativo.