Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 16 marzo 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x^2} - \operatorname{sen} x}{x - \arctan x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x + 3\operatorname{sen}(2x))}{e^x - \log(e+x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - 2x}{x \operatorname{sen} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(1/x^2)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2\cos x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(3+x)^{1/3} - 1}{\tan x}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{1+x}\right) + \log|x-1|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **d)** usando il punto c precedente studiare qualitativamente il segno di g; **e)** calcolare la derivata seconda. Verificare che la funzione è concava per ogni $x > 1$. Studiando il comportamento di g'' nei punti di discontinuità di g ed usando opportunamente il Teorema degli zeri, si dimostri l'esistenza di almeno due zeri di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{x-3}{\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\dfrac{3\cos x - 2x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$, (c) $\left(2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$.

6. Mediante la sostituzione $t = -x + \sqrt{x^2+x+1}$ si calcoli $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Compito A

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

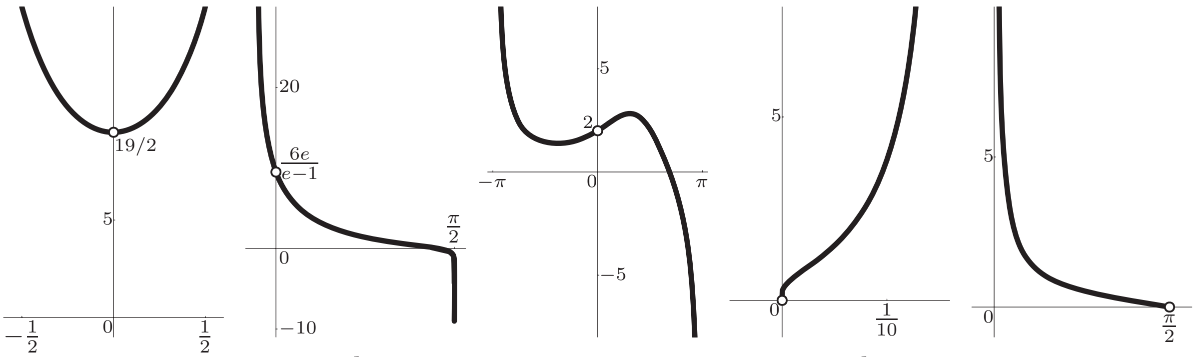
Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito A

Compitino del 16 marzo 2001

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x^2} - \operatorname{sen} x}{x - \arctan x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2} + 6x^2 e^{3x^2} - \cos x}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x^2)}_{\to 1} \frac{e^{3x^2} + 6x^2 e^{3x^2} - \cos x}{x^2} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \Big(3\frac{e^{3x^2} - 1}{3x^2} + 6e^{3x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2} \Big) = 1 \cdot \Big(3 + 6 + \frac{1}{2} \Big) = \frac{19}{2}\,.$$

Alternativamente si poteva, una volta eliminato il termine $1 + x^2$ che non dà fastidio, utilizzare nuovamente l'Hôpital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x^2} - \operatorname{sen} x}{x - \arctan x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6xe^{3x^2} + 12xe^{3x^2} + 36x^2 e^{3x^2} + \operatorname{sen} x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(9e^{3x^2} + 18x^2 e^{3x^2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2x} \Big) = 9 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 19/2.

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x + 3\operatorname{sen}(2x))}{e^x - \log(e+x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6\cos(2x) - \operatorname{sen} x}{\cos x + 3\operatorname{sen}(2x)}}{e^x - \frac{1}{e+x}} = \frac{6}{1 - 1/e} = \frac{6e}{e-1}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $6e/(e-1)$.

c. Applicando due volte il Teorema dell'Hôpital (forma indeterminata 0/0) dopo avere semplificato la funzione si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - 2x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - 2x}{x^2} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} \Big) = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - 1 - 2x}{x^2} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2\operatorname{sen} x}\cos x - 2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2\operatorname{sen} x}\cos^2 x - 2e^{2\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x}{2} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 2.

d. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura errato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(1/x^2)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2\cos x} = \left[\frac{\pi/2}{+\infty}\right] = 0\,.$$

e. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura errato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(3+x)^{1/3}-1}{\tan x} = \left[\frac{\sqrt[3]{3}-1}{0^+}\right] = +\infty\,.$$

2.a+b. La funzione è una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai e quindi è anche ovunque continua e derivabile. Il limite a $\pm\infty$ di f vale 0. Si osserva inoltre che la funzione è dispari.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

d. Calcoliamo la derivata prima

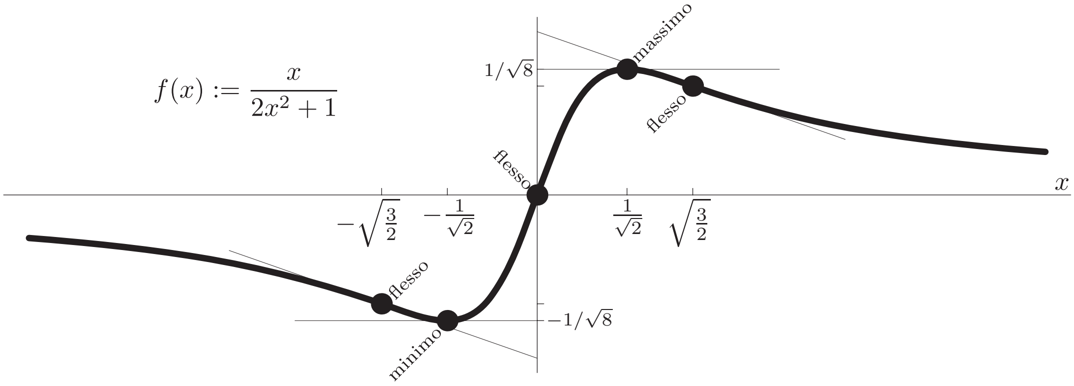
$$f'(x) = \frac{2x^2+1-x(4x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $1-2x^2 \geq 0$ ovvero se $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. La funzione è dunque crescente per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, decrescente sugli intervalli $]-\infty,-1/\sqrt{2}[$ e $]1/\sqrt{2},+\infty[$ ed ammette un massimo relativo per $x = 1/\sqrt{2}$ ed un minimo relativo per $x = -1/\sqrt{2}$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-4x(2x^2+1)^2 - (1-2x^2)2(2x^2+1)4x}{(2x^2+1)^4} = \frac{-4x(2x^2+1) - (1-2x^2)8x}{(2x^2+1)^3} =$$
$$= 4x\frac{2x^2-3}{(2x^2+1)^3}\,.$$

Si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x(2x^2-3) \geq 0$. Si ottiene che f è concava sugli intervalli $]-\infty,-\sqrt{3/2}[$ e $]0,\sqrt{3/2}[$ mentre è convessa su $]-\sqrt{3/2},0[$ e $]\sqrt{3/2},+\infty[$. In corrispondenza di 0, $\pm\sqrt{3/2}$ la funzione ha tre punti di flesso.



3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. In corrispondenza di -1 ed 1 la funzione ha due punti di discontinuità. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \log 2 \mp \frac{\pi}{2}.$$

c. La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(1+x)^2+x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x(2x+3)}{(x-1)\big((1+x)^2+x^2\big)}\,.$$

Il segno della derivata è dato dal segno del prodotto di $x(2x+3)/(x-1)$ e dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x<-3/2 \text{ o } 0<x<1,\\ =0, & \text{se } x=-3/2 \text{ oppure } x=0,\\ >0, & \text{se } -3/2<x<-1 \text{ o } -1<x<0 \text{ o } x>1.\end{cases}$$

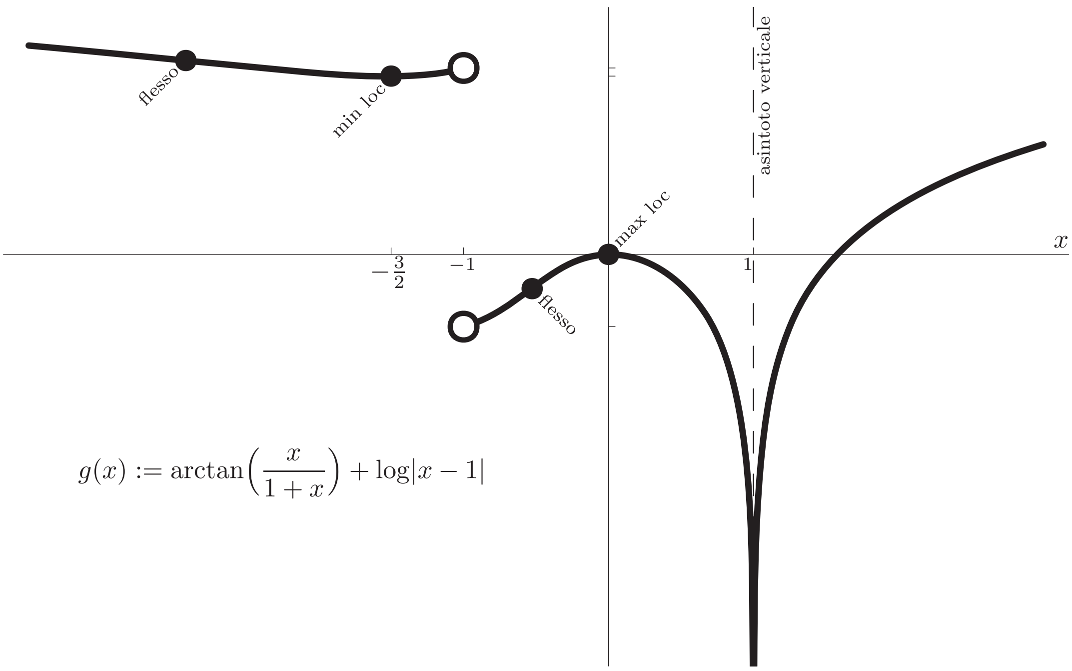
In particolare g è decrescente su $]-\infty,-3/2[$ e $]0,1[$, crescente su $]-3/2,-1[$, $]-1,0[$ e $]1,+\infty[$. Nei punti $-3/2$ e 0 la funzione ammette rispettivamente un minimo ed un massimo relativo. Si ha inoltre $g(0)=0$ e $g(-3/2)=\arctan 3+\log(5/2)>0$.

d. La funzione decresce su $]-\infty,-3/2[$ e poi cresce fino ad $x=-1$. Poiché $g(-3/2)>0$ la funzione è strettamente positiva per $x<-1$. In seguito la funzione cresce su $]-1,0[$ e poi decresce nuovamente fino ad $x=1$. Poiché $g(0)=0$ la funzione è sempre negativa su $]-1,1[$ a parte in 0 dove si annulla. Infine per $x>1$ la funzione è strettamente crescente ed assume tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$. Ne segue che f ha su tale insieme un unico zero.

e. La derivata seconda è

$$g''(x)=-\frac{4x+2}{\big((1+x)^2+x^2\big)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=-\frac{4x^4+12x^3+2x^2+4x+3}{\big((1+x)^2+x^2\big)^2(x-1)^2}\,.$$

Si riconosce dunque facilmente che la derivata seconda è sempre negativa per tutti gli x del dominio e maggiori di zero, dunque su tale insieme la funzione è concava. Si ha infine $\lim_{x\to-1}g''(x)=7/4>0$, $\lim_{x\to-\infty}g''(x)=0^-$, mentre $g''(0)=-3<0$. Applicando il Teorema degli zeri alla funzione continua g'' sugli intervalli $]-\infty,-1]$ e $[-1,0]$ si ottengono almeno due punti dove g'' si annulla, candidati ad essere dei flessi.



4.a. Si spezza la funzione in somma:

$$\int\frac{x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac12\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=-\frac12\int(1-x^2)^{-1/2}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\,dx-3\,\mathrm{arcsen}\,x=-\sqrt{1-x^2}-3\,\mathrm{arcsen}\,x+c\,.$$

b. Si spezza la funzione in somma:

$$\int \frac{3\cos x - 2x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\,dx = 3\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx - \int 2x\,dx = 3\log|\operatorname{sen} x| - x^2 + c\,.$$

c. Si svolge il quadrato:

$$\int \Big(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2 dx = \int \Big(4x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\Big)\,dx = \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^{3/2} + \log|x| + c\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

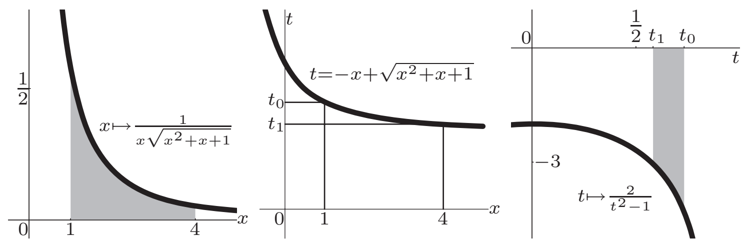
$$\begin{aligned}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\int e^{3x}2\cos(2x)\,dx = \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{3}\Big(\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) - \frac{1}{3}\int e^{3x}(-2\operatorname{sen}(2x))\,dx\Big) = \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{9}e^{3x}\cos(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Portando il termine $\frac{4}{9}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$ a primo membro e dividendo per $13/9$ otteniamo

$$\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{e^{3x}}{13}\big(3\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\big) + c\,.$$

6. Dalla relazione $t + x = \sqrt{x^2+x+1}$, elevando al quadrato si ottiene $t^2 + 2tx = x+1$ ossia $x = (1-t^2)/(2t-1)$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-2t(2t-1) - (1-t^2)2}{(2t-1)^2} = \\ &= -2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,.\end{aligned}$$



Si ha anche

$$\sqrt{x^2+x+1} = t + x = t + \frac{1-t^2}{2t-1} = \frac{t^2-t+1}{2t-1}\,.$$

Poniamo infine $t_0 = -1+\sqrt{3}$, $t_1 = -4+\sqrt{21}$. Per la formula di sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t-1}\cdot\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\cdot\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{2}{t^2-1}\,dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \Big[\log|t-1| - \log|t+1|\Big]_{t_0}^{t_1}\,.\end{aligned}$$

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 16 marzo 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\operatorname{sen}(2x)}{x-\arctan x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(2x)+\operatorname{sen}x)}{e^x-\log(e+2x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{x\operatorname{sen}x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(2/x)}{\log\left(1+\frac{2}{x}\right)-3\operatorname{sen}x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(2+x)^{1/2}-3}{\tan x}$

2. Data la funzione $f(x)=-\dfrac{x}{x^2+2}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x)=\arctan\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)+\log|x|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **d)** usando il punto c precedente studiare qualitativamente il segno di g; **e)** calcolare la derivata seconda. Verificare che la funzione è concava per ogni $x<0$. Studiando il comportamento di g'' nei punti di discontinuità di g ed usando opportunamente il Teorema degli zeri, si dimostri l'esistenza di almeno due zeri di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{3x+1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \text{(b)}\quad \frac{2x\cos x-5\operatorname{sen}x}{\cos x},\qquad \text{(c)}\quad \left(3x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $e^{3x}\cos(2x)$.

6. Mediante la sostituzione $t=-x-\sqrt{x^2+x+1}$ si calcoli $\displaystyle\int_{-4}^{-1}\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Compito B

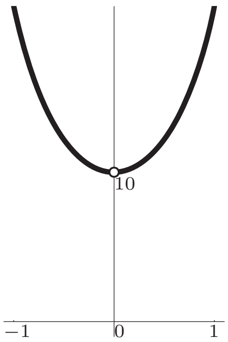
Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

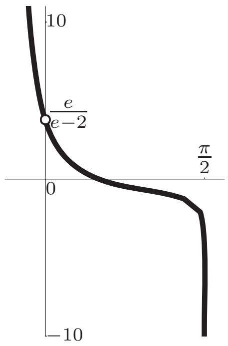
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

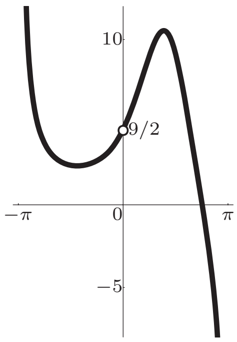
Analisi Matematica, compito B

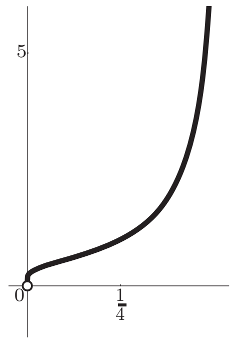
Compitino del 16 marzo 2001

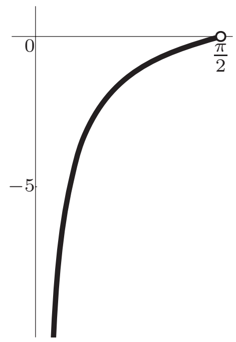
Svolgimento











1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\operatorname{sen}(2x)}{x-\arctan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2\cos(2x)}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}2(1+x^2)\cdot\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-\cos(2x)}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+2e^{x^2}+4\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)=2\cdot\left(1+2+4\frac{1}{2}\right)=10\,.$$

Alternativamente si poteva, una volta eliminato il termine $1+x^2$ che non dà fastidio, utilizzare nuovamente l'Hôpital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\operatorname{sen}(2x)}{x-\arctan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}+2\operatorname{sen}(2x)}{2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(3e^{x^2}+2x^2e^{x^2}+2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right)=2(3+0+2)=10\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 10.

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(2x)+\operatorname{sen}x)}{e^x-\log(e+2x)}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)+\operatorname{sen}x}}{e^x-\frac{2}{e+2x}}=\frac{1}{1-2/e}=\frac{e}{e-2}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $e/(e-2)$.

c. Applicando due volte il Teorema dell'Hôpital (forma indeterminata 0/0) dopo avere semplificato la funzione si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{x\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{x^2}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen}x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{x^2}=$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3\operatorname{sen}x}\cos x-3}{2x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3\operatorname{sen}x}\cos^2 x-3e^{3\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}x}{2}=\frac{9}{2}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 9/2.

d. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(2/x)}{\log\left(1+\frac{2}{x}\right) - 3\,\mathrm{sen}\,x} = \left[\frac{\pi/2}{+\infty}\right] = 0\,.$$

e. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(2+x)^{1/2} - 3}{\tan x} = \left[\frac{\sqrt{2}-3}{0^+}\right] = -\infty\,.$$

2.a+b. La funzione è una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla e quindi è anche ovunque continua e derivabile. Il limite a $\pm\infty$ di f vale 0. Si osserva inoltre che la funzione è dispari.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$.

d. Calcoliamo la derivata prima

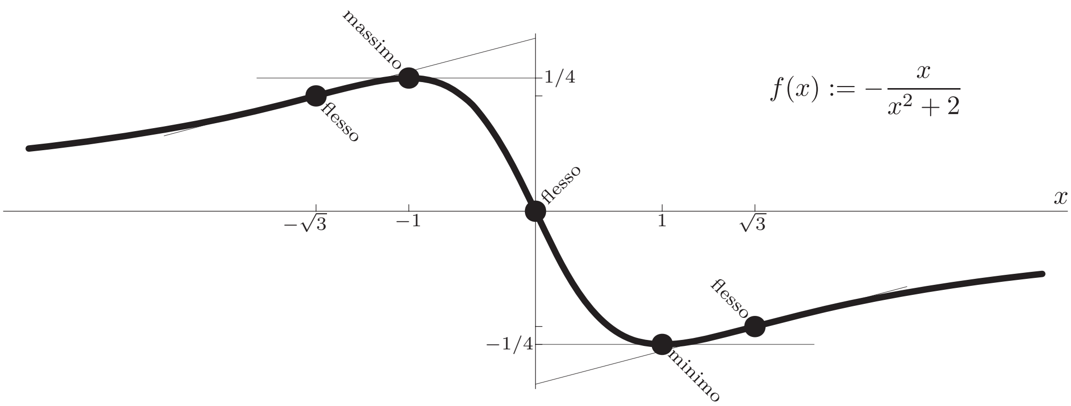
$$f'(x) = -\frac{x^2+2-x(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+2)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 2 \geq 0$ ovvero se $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $\sqrt{2} \leq x$. La funzione è dunque crescente per $x < -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < x$, decrescente su $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ ed ammette un massimo relativo per $x = -\sqrt{2}$ ed un minimo relativo per $x = \sqrt{2}$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+2)^2 - (x^2-2)2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4} = \frac{2x(x^2+2) - (x^2-2)4x}{(x^2+2)^3} =$$
$$= 2x\frac{6-x^2}{(x^2+2)^3}.$$

Si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x(6-x^2) \geq 0$. Si ottiene che f è convessa sugli intervalli $]-\infty, -\sqrt{6}[$ e $]0, \sqrt{6}[$ mentre è concava su $]-\sqrt{6}, 0[$ e $]\sqrt{6}, +\infty[$. In corrispondenza di 0 e $\pm\sqrt{6}$ la funzione ha tre punti di flesso.



3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. In corrispondenza di 0 e 2 la funzione ha due punti di discontinuità. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} g(x) = \log 2 \pm \frac{\pi}{2}.$$

c. La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^2} \cdot \frac{x-2-(x-1)}{(2-x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(1-x)^2+(2-x)^2} =$$
$$= \frac{(x-1)(2x-5)}{x\big((1-x)^2+(2-x)^2\big)}\,.$$

Il segno della derivata coincide col segno del prodotto $(x-1)(2x-5)/x$ e dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x<0 \text{ o } 1<x<2 \text{ o } 2<x<5/2,\\ =0, & \text{se } x=5/2 \text{ oppure } x=1,\\ >0, & \text{se } 0<x<1 \text{ o } x>5/2.\end{cases}$$

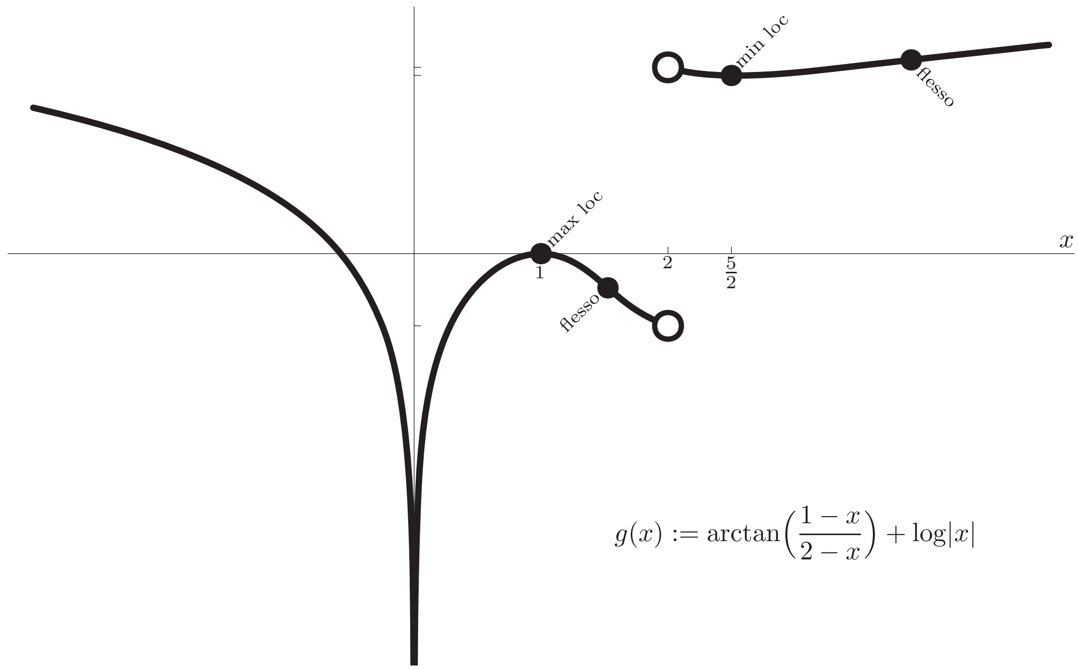
In particolare g è decrescente su $]-\infty,0[$, $]1,2[$ e $]2,5/2[$, crescente su $]0,1[$ e $]5/2,+\infty[$. Nei punti $5/2$ e 1 la funzione ammette rispettivamente un minimo ed un massimo relativo. Si ha inoltre $g(1)=0$ e $g(5/2)=\arctan 3+\log(5/2)>0$.

d. La funzione è continua sul dominio. Inoltre su $]-\infty,0[$ è strettamente decrescente e cambia segno, perché assume valori arbitrariamente vicini a $-\infty$ e a $+\infty$. Ne discende che su tale intervallo la funzione ammette un unico zero. In seguito la funzione cresce su $]0,1[$ e poi decresce fino ad $x=2$. Poiché $g(1)=0$ la funzione è strettamente negativa su $]0,2[$ a parte in $x=1$ dove si annulla. Continuando, g decresce su $]2,5/2[$ e poi cresce nuovamente. Poiché $g(5/2)>0$ la funzione è sempre positiva su $]2,+\infty[$.

e. La derivata seconda è

$$g''(x)=\frac{4x-6}{\big((1-x)^2+(2-x)^2\big)^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{4x^4-28x^3+62x^2-60x+25}{x^2\big((1-x)^2+(2-x)^2\big)^2}\,.$$

Si riconosce dunque facilmente che la derivata seconda è sempre negativa per tutti gli $x<0$, dunque su tale insieme la funzione è concava. Si ha infine $\lim_{x\to 2} g''(x)=7/4>0$, $\lim_{x\to+\infty} g''(x)=0^-$, mentre $g''(1)=-3<0$. Applicando il Teorema degli zeri alla funzione continua g'' sugli intervalli $[2,+\infty[$ e $[1,2]$ si ottengono almeno due punti dove g'' si annulla, candidati ad essere dei flessi.



4.a. Si spezza la funzione in somma:

$$\int\frac{3x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=-\frac{3}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\,dx+\operatorname{arcsen}x=-3\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x+c\,.$$

b. Si spezza la funzione in somma:

$$\int \frac{2x\cos x - 5\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int 2x\,dx + 5\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = x^2 + 5\log|\cos x| + c\,.$$

c. Si svolge il quadrato:

$$\int \Big(3x - \frac{2}{\sqrt{x}}\Big)^2 dx = \int \Big(9x^2 - 12\sqrt{x} + \frac{4}{x}\Big)dx = 3x^3 - 8x^{3/2} + 4\log|x| + c\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

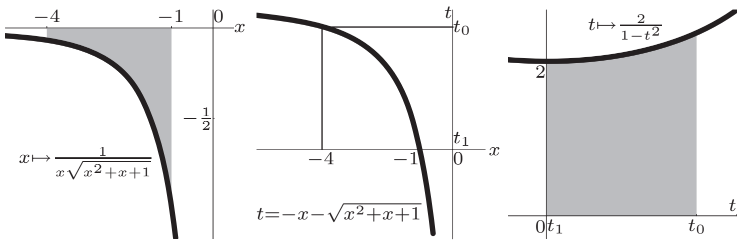
$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos(2x)\,dx &= \frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) - \frac{1}{3}\int e^{3x}(-2\operatorname{sen}(2x))\,dx = \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{3}\Big(\frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\int e^{3x}2\cos(2x)\,dx\Big) = \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{9}e^{3x}\operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cos(2x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Portando il termine $\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos(2x)\,dx$ a primo membro e dividendo per 13/9 si ottiene

$$\int e^{3x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{3x}}{13}\big(2\operatorname{sen}(2x) + 3\cos(2x)\big) + c\,.$$

6. Da $t + x = -\sqrt{x^2+x+1}$, elevando al quadrato si ottiene $t^2+2tx = x+1$ ossia $x = (1-t^2)/(2t-1)$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-2t(2t-1)-(1-t^2)2}{(2t-1)^2} = \\ &= -2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,.\end{aligned}$$



Si ha anche

$$\sqrt{x^2+x+1} = -t - x = -t - \frac{1-t^2}{2t-1} = -\frac{t^2-t+1}{2t-1}\,.$$

Poniamo infine $t_0 = 4-\sqrt{13}$, $t_1 = 0$. Per la formula di sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-1}\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\frac{1-t^2}{2t-1}\cdot\frac{-t^2+t-1}{2t-1}}\cdot\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{2}{1-t^2}\,dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\Big)dt = \Big[\log|t+1| - \log|t-1|\Big]_{t_0}^{t_1}\,.\end{aligned}$$

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 16 marzo 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2xe^{3x^2} - \operatorname{sen}(2x)}{x - \arctan x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(3x) + \operatorname{sen}(2x))}{e^x - \log(e + x)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3\operatorname{sen} x} - 1 - 3x}{2x \operatorname{sen} x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(1/e^x)}{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\cos x}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(2-x)^{1/2} - 2}{x^2}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 3}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \arctan\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right) + \log|x - 1|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **d)** usando il punto c precedente studiare qualitativamente il segno di g; **e)** calcolare la derivata seconda. Verificare che la funzione è concava per ogni $x < 0$. Studiando il comportamento di g'' nei punti di discontinuità di g ed usando opportunamente il Teorema degli zeri, si dimostri l'esistenza di almeno due zeri di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di g.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{4 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}}$, (b) $\dfrac{\cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$, (c) $\left(x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $e^{2x} \operatorname{sen}(3x)$.

6. Mediante la sostituzione $t = -x + \sqrt{x^2 + x + 1}$ si calcoli $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$.

Compito C

Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

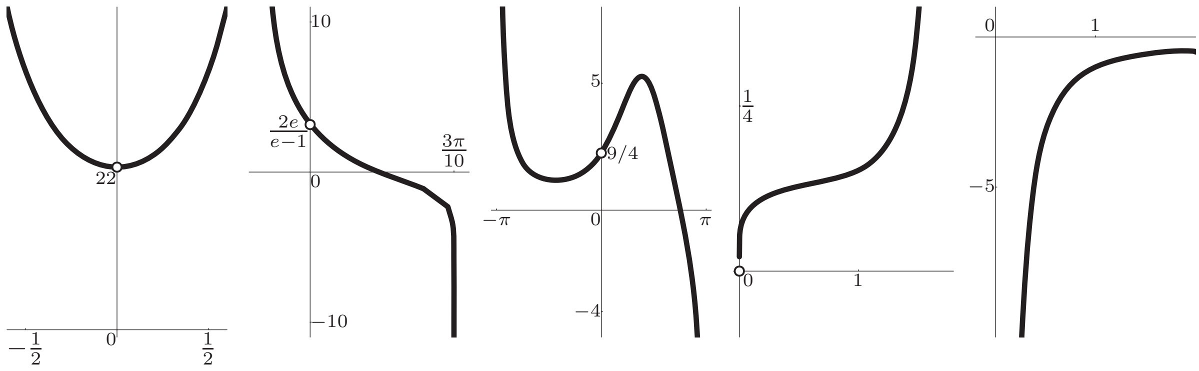
Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito C

Compitino del 16 marzo 2001

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{3x^2}-\operatorname{sen}(2x)}{x-\arctan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{3x^2}+12x^2e^{3x^2}-2\cos(2x)}{1-\frac{1}{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2(1+x^2)\cdot\frac{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}-\cos(2x)}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\Big(3\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}+6e^{3x^2}+4\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\Big)=2\cdot\Big(3+6+4\frac{1}{2}\Big)=22\,.$$

Alternativamente si poteva, una volta eliminato il termine $1+x^2$ che non dà fastidio, utilizzare nuovamente l'Hôpital ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\operatorname{sen}(2x)}{x-\arctan x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{6xe^{3x^2}+12xe^{3x^2}+36x^3e^{3x^2}+2\operatorname{sen}(2x)}{2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\Big(9e^{x^2}+18x^2e^{3x^2}+2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\Big)=2(9+0+2)=22\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 22.

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(3x)+\operatorname{sen}(2x))}{e^x-\log(e+x)}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos(2x)-3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)+\operatorname{sen}(2x)}}{e^x-\frac{1}{e+x}}=\frac{2}{1-1/e}=\frac{2e}{e-1}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $2e/(e-1)$.

c. Applicando due volte il Teorema dell'Hôpital (forma indeterminata 0/0) dopo avere semplificato la funzione si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{2x\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{2x^2}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\operatorname{sen}x}-1-3x}{2x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3\operatorname{sen}x}\cos x-3}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3\operatorname{sen}x}\cos^2 x-3e^{3\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}x}{4}=\frac{9}{4}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 9/4.

d. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(1/e^x)}{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+3\cos x} = \left[\frac{\pi/4}{+\infty}\right] = 0\,.$$

e. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(2-x)^{1/2}-2}{x^2} = \left[\frac{\sqrt{2}-2}{0^+}\right] = -\infty\,.$$

2.a+b. La funzione è una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla e quindi è anche ovunque continua e derivabile. Il limite a $\pm\infty$ di f vale 0. Si osserva inoltre che la funzione è dispari.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x) \ge 0$ se e solo se $x \ge 0$.

d. Calcoliamo la derivata prima

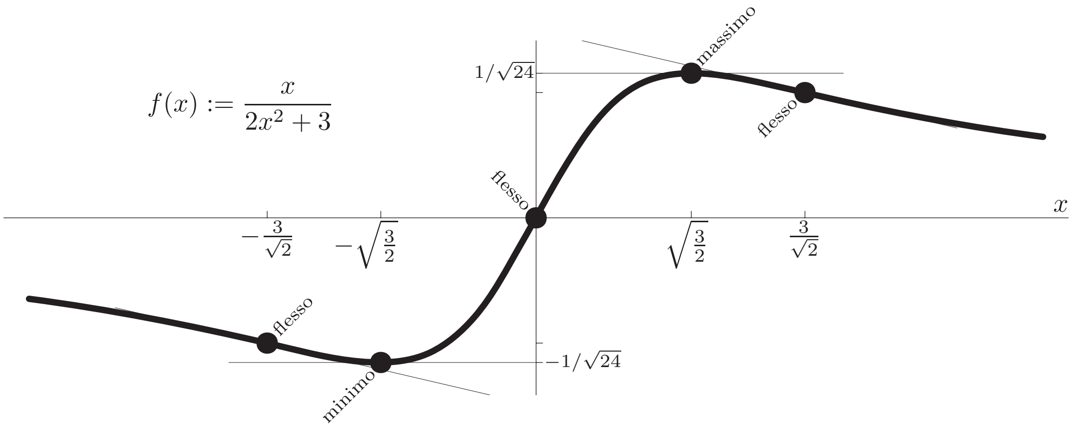
$$f'(x) = \frac{2x^2+3-x(4x)}{(2x^2+3)^2} = \frac{3-2x^2}{(2x^2+3)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \ge 0$ se e solo se $3-2x^2 \ge 0$ ovvero se $-\sqrt{3/2} \le x \le \sqrt{3/2}$. La funzione è dunque crescente per $-\sqrt{3/2} < x < \sqrt{3/2}$, decrescente sugli intervalli $]-\infty, -\sqrt{3/2}[$ e $]\sqrt{3/2}, +\infty[$ ed ammette un massimo relativo per $x = \sqrt{3/2}$ ed un minimo relativo per $x = -\sqrt{3/2}$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-4x(2x^2+3)^2-(3-2x^2)2(2x^2+3)4x}{(2x^2+3)^4} = \frac{-4x(2x^2+3)-(3-2x^2)8x}{(2x^2+3)^3} =$$
$$= 4x\frac{2x^2-9}{(2x^2+3)^3}\,.$$

Si ha $f''(x) \ge 0$ se e solo se $x(2x^2-9) \ge 0$. Si ottiene che f è concava sugli intervalli $]-\infty, -3/\sqrt{2}[$ e $]0, 3/\sqrt{2}[$ mentre è convessa su $]-3/\sqrt{2}, 0[$ e $]3/\sqrt{2}, +\infty[$. In corrispondenza di 0, $\pm 3/\sqrt{2}$ la funzione ha tre punti di flesso.



3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. In corrispondenza di 1 e 3 la funzione ha due punti di discontinuità. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^\pm} g(x) = \log 2 \pm \frac{\pi}{2}.$$

c. La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^2}\cdot\frac{x-3-(x-2)}{(3-x)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(2-x)^2+(3-x)^2} =$$
$$= \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-1)\big((2-x)^2+(3-x)^2\big)}\,.$$

Il segno della derivata coincide col segno di $(x-2)(2x-7)/(x-1)$ e dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x<1 \text{ o } 2<x<3 \text{ o } 3<x<7/2,\\ =0, & \text{se } x=7/2 \text{ oppure } x=2,\\ >0, & \text{se } 1<x<2 \text{ o } x>7/2.\end{cases}$$

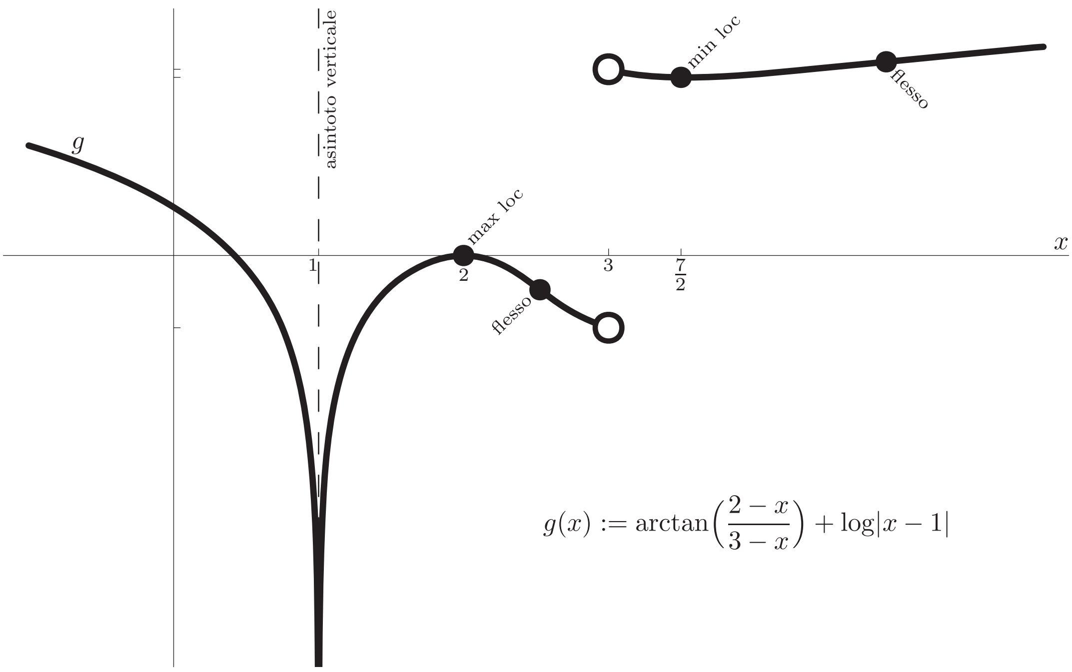
In particolare g è decrescente su $]-\infty,1[$, $]2,3[$ e $]3,7/2[$, crescente su $]1,2[$ e $]7/2,+\infty[$. Nei punti 7/2 e 2 la funzione ammette rispettivamente un minimo ed un massimo relativo. Si ha inoltre $g(2)=0$ e $g(7/2)=\arctan 3+\log(5/2)>0$.

d. La funzione è strettamente decrescente su $]-\infty,1[$ ed assume valori tra $-\infty$ e $+\infty$ Ne discende che su tale insieme la funzione ammette un unico zero. In seguito la funzione cresce su $]1,2[$ e quindi decresce fino ad $x=3$. Poiché $g(2)=0$ la funzione è strettamente negativa su $]1,3[$ a parte in $x=2$ dove si annulla. Continuando g decresce $]3,7/2[$ e poi cresce nuovamente. Poiché $g(7/2)>0$ la funzione è sempre positiva su $]3,+\infty[$.

e. La derivata seconda è

$$g''(x)=\frac{4x-10}{\big((2-x)^2+(3-x)^2\big)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=-\frac{4x^4-44x^3+170x^2-284x+179}{(x-1)^2\big((2-x)^2+(3-x)^2\big)^2}\,.$$

Si riconosce dunque facilmente che la derivata seconda è sempre negativa per tutti gli $x<0$, dunque su tale insieme la funzione è concava. Si ha infine $\lim_{x\to 3} g''(x)=\frac{7}{4}>0$, $\lim_{x\to+\infty} g''(x)=0^-$, mentre $g''(2)=-3<0$. Applicando il Teorema degli zeri alla funzione continua g'' sugli intervalli $[3,+\infty[$ e $[2,3]$ si ottengono almeno due punti dove g'' si annulla, candidati ad essere dei flessi.



4.a. Si spezza la funzione in somma:

$$\int \frac{4-3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+4\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=\frac{3}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\,dx+4\operatorname{arcsen}x=3\sqrt{1-x^2}+4\operatorname{arcsen}x+c$$

b. Si spezza la funzione in somma:

$$\int\frac{\cos x+3x^2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\,dx=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx+\int 3x^2\,dx=\log|\operatorname{sen}x|+x^3+c\,.$$

c. Si svolge il quadrato:

$$\int\Big(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)^2(x)\,dx=\int\Big(x^2-\sqrt{x}+\frac{1}{4x}\Big)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{4}\log|x|+c\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

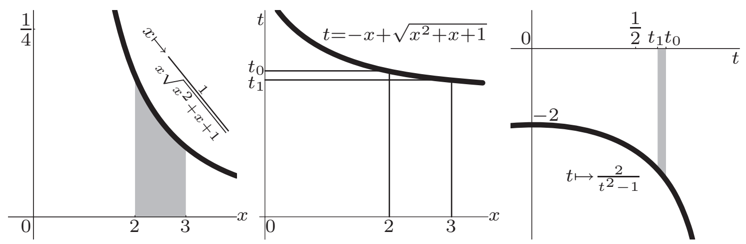
$$\begin{aligned}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx&=\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}3\cos(3x)\,dx=\\&=\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen}(3x)-\frac{3}{2}\bigg(\frac{e^{2x}}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\operatorname{sen}(3x))\,dx\bigg)=\\&=\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen}(3x)-\frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)-\frac{9}{4}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Portando il termine $\frac{9}{4}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx$ a primo membro e dividendo per $13/4$ si ottiene

$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx=\frac{e^{2x}}{13}\big(2\operatorname{sen}(3x)-3\cos(3x)\big)+c\,.$$

6. Dalla relazione $t+x=\sqrt{x^2+x+1}$, elevando al quadrato si ottiene $t^2+2tx=x+1$ ossia $x=(1-t^2)/(2t-1)$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{-2t(2t-1)-(1-t^2)2}{(2t-1)^2}=\\&=-2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,.\end{aligned}$$



Si ha anche

$$\sqrt{x^2+x+1}=t+x=t+\frac{1-t^2}{2t-1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}\,.$$

Poniamo infine $t_0=-2+\sqrt{7}$, $t_1=-3+\sqrt{13}$. Per la formula di sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx&=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\frac{1-t^2}{2t-1}\cdot\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\cdot\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{2}{t^2-1}\,dt=\\&=\int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)\,dt=\Big[\log|t-1|-\log|t+1|\Big]_{t_0}^{t_1}\,.\end{aligned}$$

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino del 16 marzo 2001

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Risolvere i seguenti limiti usando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x^2} - \operatorname{sen} x}{2x - \arctan(2x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x - 2\operatorname{sen} x)}{e^{2x} - \log(e + x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{4\operatorname{sen} x} - 1 - 4x}{3x \operatorname{sen} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(3/x^5)}{\log\left(1 + \frac{1}{3x}\right) - 5\operatorname{sen} x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(4 + x)^{1/2} - 3}{\operatorname{sen}^2 x}$

2. Data la funzione $f(x) = -\dfrac{x}{x^2 + 8}$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** studiare il segno della funzione; **d)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità e di concavità; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

3. Data la funzione $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x+2} - 1\right) + \log|x|$

a) trovare il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare la continuità e derivabilità; **c)** calcolare la derivata prima, e trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione; **d)** usando il punto c precedente studiare qualitativamente il segno di f; **e)** calcolare la derivata seconda. Verificare che la funzione è concava per ogni $x > 0$. Studiando il comportamento di g'' nei punti di discontinuità di g e in $x = -1$ ed usando opportunamente il Teorema degli zeri, si dimostri l'esistenza di almeno due punti zeri di g''; **f)** tracciare infine l'andamento qualitativo del grafico di f.

4. Si calcolino gli integrali indefiniti delle funzioni

(a) $\dfrac{1 - 5x}{\sqrt{1 - x^2}}$ (b) $\dfrac{3x^2 \cos x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x}$, (c) $\left(3x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2$.

5. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $e^{2x}\cos(3x)$.

6. Mediante la sostituzione $t = -x - \sqrt{x^2 + x + 1}$ si calcoli $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$.

Compito D

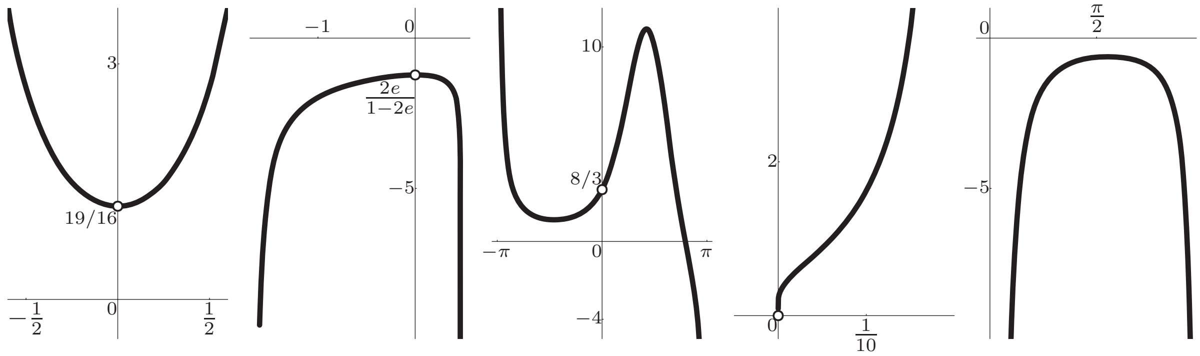
Punti: 2+2+2+2+2, 6, 8, 2+2+2, 3, 3.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica, compito D

Compitino del 16 marzo 2001

Svolgimento



1. a. **1. b.** **1. c.** **1. d.** **1. e.**

1.a. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0}\frac{xe^{3x^2}-\operatorname{sen}x}{2x-\arctan(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}-\cos x}{2-\frac{2}{1+4x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{1+4x^2}{8}\cdot\frac{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}-\cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to0}\Big(3\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}+6e^{3x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\Big) = \frac{1}{8}\cdot\Big(3+6+\frac{1}{2}\Big) = \frac{19}{16}\,.$$

Alternativamente si poteva, una volta eliminato il termine $1+x^2$ che non dà fastidio, utilizzare nuovamente l'Hôpital ottenendo:

$$\lim_{x\to0}\frac{xe^{3x^2}-\operatorname{sen}x}{2x-\arctan(2x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{1}{8}\lim_{x\to0}\frac{6xe^{3x^2}+12xe^{3x^2}+36x^2e^{3x^2}+\operatorname{sen}x}{2x} =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{x\to0}\Big(9e^{3x^2}+18x^2e^{3x^2}+\frac{\operatorname{sen}x}{2x}\Big) = \frac{1}{8}\Big(9+\frac{1}{2}\Big) = \frac{19}{16}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 19/16.

b. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x-2\operatorname{sen}x)}{e^{2x}-\log(e+x)} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{-\operatorname{sen}x-2\cos x}{\cos x-2\operatorname{sen}x}}{2e^{2x}-\frac{1}{e+x}} = \frac{-2}{2-1/e} = \frac{2e}{1-2e}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale $\frac{2e}{1-2e}$.

c. Applicando due volte il Teorema dell'Hôpital (forma indeterminata 0/0) dopo avere semplificato la funzione si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4\operatorname{sen}x}-1-4x}{3x\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{e^{4\operatorname{sen}x}-1-4x}{3x^2} = 1\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{4\operatorname{sen}x}-1-4x}{3x^2} =$$

$$\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to0}\frac{4e^{4\operatorname{sen}x}\cos x-4}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{16e^{4\operatorname{sen}x}\cos^2x-4e^{4\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}x}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\,.$$

Per il Teorema dell'Hôpital il limite richiesto esiste e vale 8/3.

d. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(3/x^5)}{\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)-5\operatorname{sen} x} = \left[\frac{\pi/2}{+\infty}\right] = 0\,.$$

e. Non è una forma indeterminata, quindi il Teorema dell'Hôpital non solo è inutile, ma è addirittura sbagliato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(4+x)^{1/2}-3}{\tan x} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty\,.$$

2.a+b. La funzione è una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla e quindi è anche ovunque continua e derivabile. Il limite a $\pm\infty$ di f vale 0. Si osserva inoltre che la funzione è dispari.

c. Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$.

d. Calcoliamo la derivata prima

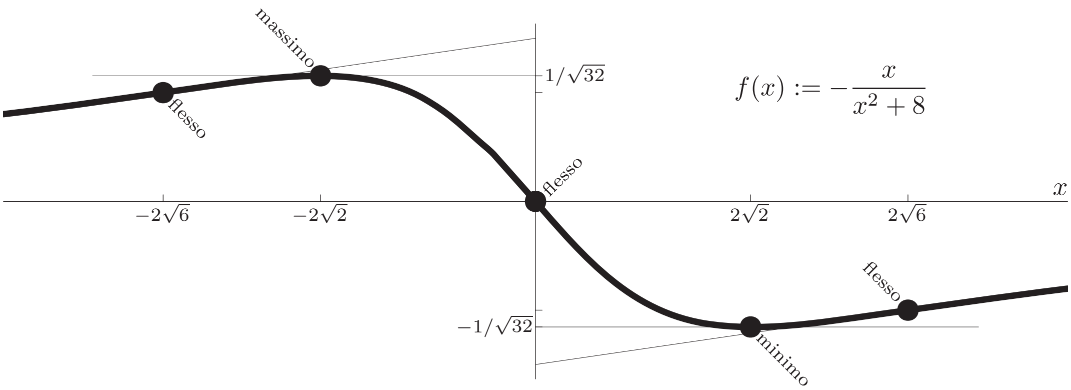
$$f'(x) = -\frac{x^2+8-x(2x)}{(x^2+8)^2} = \frac{x^2-8}{(x^2+8)^2}\,.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-8 \geq 0$ ovvero se $x \leq -2\sqrt{2}$ oppure $2\sqrt{2} \leq x$. La funzione è dunque crescente per $x < -2\sqrt{2}$ e per $2\sqrt{2} < x$, decrescente su $]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$ ed ammette un massimo relativo per $x = -2\sqrt{2}$ ed un minimo relativo per $x = 2\sqrt{2}$.

e. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+8)^2-(x^2-8)2(x^2+8)2x}{(x^2+8)^4} = \frac{2x(x^2+8)-(x^2-8)4x}{(x^2+8)^3} = 2x\frac{24-x^2}{(x^2+8)^3}\,.$$

Si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x(24-x^2) \geq 0$. Si ottiene che f è convessa sugli intervalli $]-\infty, -2\sqrt{6}[$ e $]0, 2\sqrt{6}[$ mentre è convessa su $]-2\sqrt{6}, 0[$ e $]2\sqrt{6}, +\infty[$. In corrispondenza di 0, $\pm 2\sqrt{6}$ la funzione ha tre punti di flesso.



3.a+b. Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0,-2\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. In corrispondenza di -2 e 0 la funzione ha due punti di discontinuità. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^\pm} g(x) = \log 2 \pm \frac{\pi}{2}.$$

c. La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}\cdot\frac{-1}{(2+x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2+(x+2)^2} = \frac{2x^2+5x+5}{x\big((x+1)^2+(x+2)^2\big)}\,.$$

Il segno della derivata è dato dal segno di x e dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x<-2 \text{ o } -2<x<0,\\ >0, & \text{se } x>0.\end{cases}$$

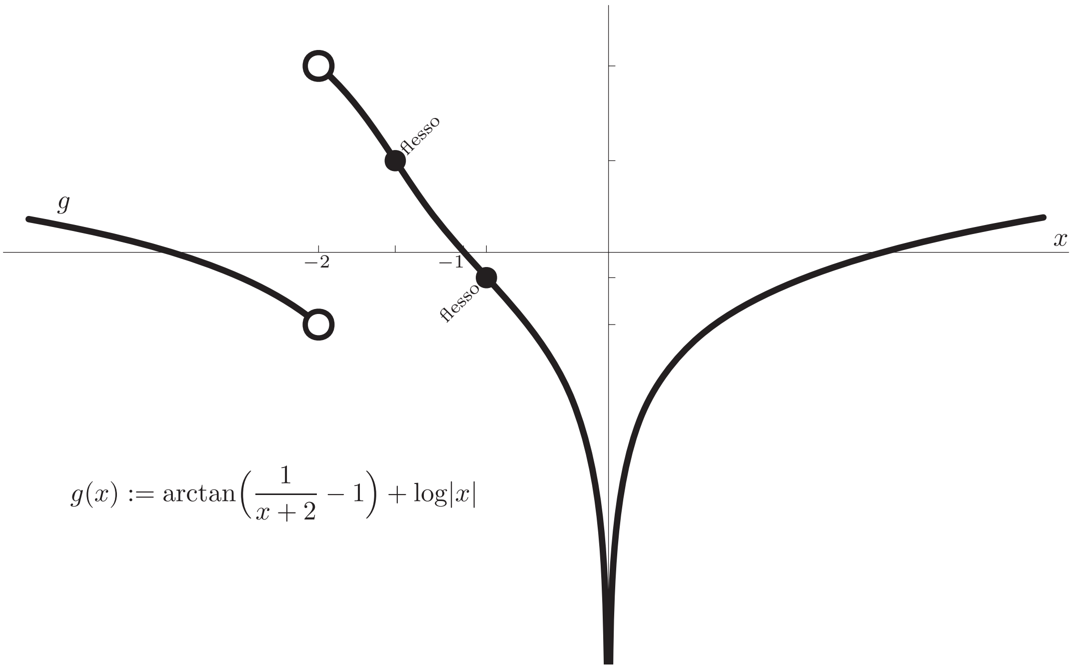
In particolare g è decrescente su $]-\infty,-2[$ e $]-2,0[$, mentre è crescente su $]0,+\infty[$.

d. La funzione è continua sul dominio. Inoltre su $]0,+\infty[$ è strettamente crescente e cambia segno, perché assume valori arbitrariamente vicini a $-\infty$ e a $+\infty$. Ammette dunque un unico zero su tale intervallo. Sull'intervallo $]-\infty,-2[$ è strettamente decrescente; poiché $\lim_{x\to-2^-} g(x) < 0$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ si deduce che su tale intervallo g ammette un unico zero. Infine sull'intervallo $]-2,0[$ la funzione è strettamente decrescente e continua. Poiché $\lim_{x\to-2^+} g(x) > 0$ e $\lim_{x\to0} g(x) = -\infty$ si deduce che g ammette su tale intervallo esattamente uno zero.

e. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{4x+6}{\big((x+1)^2+(x+2)^2\big)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{4x^4+20x^3+50x^2+60x+25}{x^2\big((x+1)^2+(x+2)^2\big)^2}\,.$$

Si riconosce dunque facilmente che la derivata seconda è sempre negativa per tutti gli $x>0$, dunque su tale insieme la funzione è concava. Inoltre per $x\to-2^+$ e per $t\to0^-$ la derivata seconda tende a valori <0, mentre $g''(-1)>0$. Pertanto g'' deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo $]-2,-1[$ e almeno un'altra in $]-1,0[$, e quei punti sono candidati a essere dei flessi.



4.a. Si spezza la funzione in somma:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-5x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \frac52\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\ &= \frac52\int(1-x^2)^{-1/2}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\,dx + \operatorname{arcsen} x = 5\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x + c\,.\end{aligned}$$

b. Si spezza la funzione in somma:

$$\int\frac{3x^2\cos x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = 3\int x^2\,dx + 2\int\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = x^2 + 2\log|\cos x| + c\,.$$

c. Si svolge il quadrato:

$$\int\Big(3x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)^2\,dx = \int\Big(9x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{4x}\Big)\,dx = 3x^3-2x^{3/2}+\frac14\log|x|+c\,.$$

5. Integriamo per parti due volte:

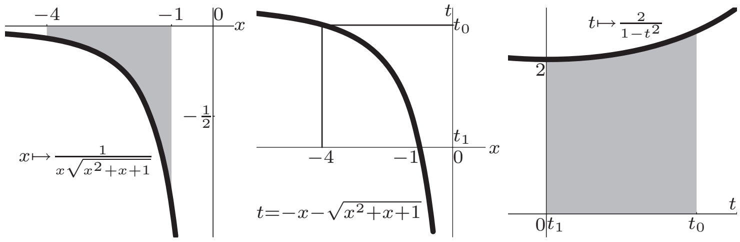
$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x) - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\,\mathrm{sen}(3x))\,dx = \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{1}{2}\int e^{2x}3\cos(3x)\,dx\right) = \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{4}e^{2x}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Portando il termine $\frac{9}{4}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$ a primo membro e dividendo per $13/4$ si ottiene

$$\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{e^{2x}}{13}\big(3\,\mathrm{sen}(3x) + 2\cos(3x)\big)\,.$$

6. Da $t + x = -\sqrt{x^2+x+1}$, elevando al quadrato si ottiene $t^2+2tx = x+1$ ossia $x = (1-t^2)/(2t-1)$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-2t(2t-1)-(1-t^2)2}{(2t-1)^2} = \\ &= -2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,.\end{aligned}$$



Si ha anche

$$\sqrt{x^2+x+1} = -t-x = -t-\frac{1-t^2}{2t-1} = -\frac{t^2-t+1}{2t-1}\,.$$

Poniamo infine $t_0 = 4-\sqrt{13}$, $t_1 = 0$. Per la formula di sostituzione si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-1}\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\frac{1-t^2}{2t-1}\cdot\frac{-t^2+t-1}{2t-1}}\cdot\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{2}{1-t^2}\,dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt = \Big[\log|t+1| - \log|t-1|\Big]_{t_0}^{t_1}\,.\end{aligned}$$