Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-1)^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+7}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log\left(\sqrt{3+e^{-x}}-\sqrt{3-e^{-x}}\right)}{5x+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1+2^x}{x^2+3^x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+5}\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^3-1}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x^3+4}{x^2+x+1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+3x+2}{5x^3-7}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}-3x}{2\sqrt[3]{x}-\tan x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x+2\operatorname{sen} x)x}{3+x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4-x^5}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(7\operatorname{sen} x)}{2x}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+5x+12}{x^3+1}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 3^{-2x}(2+\operatorname{sen}(3^x))$

2. Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la continuità della seguente funzione

$$f(x) := \begin{cases} 3a(x-1)^2-3x-\dfrac{3}{2} & \text{se } x \le 0, \\[2mm] \dfrac{1-\cos(ax)+ax\operatorname{sen} x}{x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Compito A

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(-2x-\sqrt{x^3+7x^2-1}\right)$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)$

(c) $\lim_{x\to-\infty}(\operatorname{sen}2x+4\cos x)2^{1-x^2}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+4}\right)$

(e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-4}\right)$

(f) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+2x-8}{1-3x^3}$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log\left(\sqrt{2+e^{-3x}}-\sqrt{2-e^{-3x}}\right)}{3x+2}$

(h) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-7x-2}{4+3x}$

(i) $\lim_{x\to2}\dfrac{2-\cos x}{4-x^2}$

(j) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}$

(k) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\operatorname{sen}x)}{3x^2}$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+7-x}{2-x^2+x^3}$

(m) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3^x}{2^x-3x}$

(n) $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\tan x-2\operatorname{sen}\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x})}$

(o) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{2x^2-3x^3}$

(p) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(2^x+3x)x}{1-2x}$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases}2a(x-1)^2-3x+\dfrac{a}{2}-1 & \text{se } x\le0,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sen}^2(ax)+1-\cos(ax)}{x^2} & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Compito B

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{x+1}\right)$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+7}{x^3+x-5}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} e^{7-2x}(3-\operatorname{sen}7x)$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\sqrt{1+e^{-2x}}-\sqrt{1-e^{-2x}}\right)}{3x-5}$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2-3}{x^2+5x^3+4}$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$

(g) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{\cos(3\operatorname{sen}x)-1}{5x^2}$

(h) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{1}{x^3+5x^2}$

(i) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-5}\right)$

(j) $\displaystyle \lim_{x\to1}\frac{e^x-1}{x^2-1}$

(k) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{(4^x+3\cos x+2)x}{3x-1}$

(l) $\displaystyle \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$

(m) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2-3}\right)$

(n) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^x}{4^x+3^x}$

(o) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+7x-4}{x^2+5}$

(p) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{\left(1-\cos\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x}}{2x\tan\sqrt[3]{x^2}+3x^2}$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità della seguente funzione

$$f(x):=\begin{cases} a(x+2)^2+2x-a-\dfrac{1}{2} & \text{se } x\le 0,\\[2mm] \dfrac{1-\cos(ax)+2\tan x\operatorname{sen}x}{x^2} & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Compito C

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Compitino dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3\tan x)}{2x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2-x+5}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^3+7x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+7}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x-7}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+7}{2x^3+x^2-5}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+7x+2}{2^x+1+x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2\operatorname{sen}x+3)4^{2-x-x^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)^3}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(2\sqrt{x})+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{\operatorname{sen}x}+7\sqrt[4]{x}}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\sqrt{1+e^{-x}}-\sqrt{1-e^{-x}}\right)}{2x+1}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2+7x}{x+3}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^x+x^2)x}{1-x}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{1+x^3-x^2}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x-2\tan x}{x^3}$

2. Studiare al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ la continuità della seguente funzione

$$f(x) := \begin{cases} (1+a^2)x^2+3a(x+1)-1 & \text{se } x\le 0,\\ \dfrac{\tan^2(ax)+x\operatorname{sen}x}{x^2} & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Compito D

Punti: 2 per ogni limite, 5 per l'esercizio 2.

Risposte agli esercizi

	compito A	compito B	compito C	compito D
1 a	non esiste	$-\infty$	$-\infty$	$3/2$
b	$-1/2$	$-3/2$	0	$5/2$
c	$-1/5$	0	0	$+\infty$
d	$3/2$	0	$-2/3$	$+\infty$
e	0	$-\infty$	$2/5$	$+\infty$
f	0	-1	$1/2$	$-1/2$
g	$+\infty$	-1	$-9/10$	$+\infty$
h	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
i	$+\infty$	non esiste	0	0
j	$2/5$	1	non esiste	non esiste
k	$1/2$	$1/6$	$+\infty$	0
l	$+\infty$	0	-1	$-1/2$
m	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
n	$7/2$	-2	0	$-\infty$
o	0	$+\infty$	$-\infty$	0
p	0	$-\infty$	$1/4$	-2
2	$a = 1;\ a = 3$	$a = 1;\ a = 2/3$	$a = 1;\ a = 5$	$a = 1;\ a = 2$

Soluzioni dei Problemi
del Compitino dell'11 dicembre 2000

Tema A

1a) Non esiste poichè il limite sinistro e destro sono diversi. Il numeratore tende a $1+\sin 1 > 0$ mentre il denominatore tende a 0. Più precisamente il denominatore è positivo in un intorno destro di 1 e negativo in un intorno sinistro perciò

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+\sin x}{(x-1)^3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\sin x}{(x-1)^3} = +\infty,$$

1b)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+7}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-x+1)-(x^2+7)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+7}}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+6}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+7}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+6/x}{\sqrt{1-1/x+1/x^2}+\sqrt{1+7/x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

1c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\sqrt{3+e^{-x}}-\sqrt{3-e^{-x}}\right)}{5x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x+2} \log\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{3+e^{-x}}+\sqrt{3-e^{-x}}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{-x}) + \log 2 - \log\left(\sqrt{3+e^{-x}}+\sqrt{3-e^{-x}}\right)}{5x+2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x}{5x+2} + \frac{\log 2 - \log\left(\sqrt{3+e^{-x}}+\sqrt{3-e^{-x}}\right)}{5x+2}\right) = \left[-\frac{1}{5}+0\right] = -\frac{1}{5}.$$

1d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot (1+\cos x+\cos^2 x)\right) = \left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\right] = \frac{3}{2}.$$

1e)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}} = \left[\frac{7}{+\infty}\right] = 0.$$

1f)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1+2^x}{x^2+3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1+3x/2^x+1/2^x}{1+x^2/3^x}\right) = [0\cdot 1] = 0.$$

1g)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(|x|\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)\right) = \left[+\infty\cdot(\sqrt{2}-1)\right] = +\infty.$$

1h) Il limite è della forma $[+\infty + \infty]$ e dunque vale $+\infty$.

1i)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x^3 + 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \left(x \cdot \frac{-3 + 1/x + 4/x^3}{1 + 1/x + 1/x^2} \right) = \big[-\infty \cdot (-3) \big] = +\infty.$$

1j)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{5x^3 - 7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + 3/x^2 + 2/x^3}{5 - 7/x^3} = \frac{2}{5}.$$

1k)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt[3]{x} - 3x}{2\sqrt[3]{x} - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 3x^{2/3}}{2 - \frac{\tan x}{x} x^{2/3}} = \left[\frac{1 - 0}{2 - 1\cdot 0} \right] = \frac{1}{2}.$$

1l)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x + 2\sin x)x}{3 + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x + 2\sin x)}{1 + 3/x} = \left[\frac{+\infty}{1} \right] = +\infty.$$

1m)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4 - x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4(1 - x)} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty.$$

1n)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{\sin(7\sin x)}{7\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \left[\frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right] = \frac{7}{2}.$$

1o)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2 + 5x + 12}{x^3 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{7 + 5/x + 12/x^2}{1 + 1/x^3} \right) = [0 \cdot 7] = 0.$$

1p) È del tipo $\big[0 \cdot \{\text{funzione limitata}\}\big]$ e quindi il limite vale 0.

2) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \neq 0$ la funzione coincide localmente con una funzione continua ed è dunque continua. Studiamo la continuità in $x = 0$ al variare di a. A tal fine devono esistere i limiti destro e sinistro di f in 0 e devono coincidere col valore della funzione in 0. Essendo la funzione continua da sinistra risulta subito che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3a - \frac{3}{2} = f(0).$$

Per quanto riguarda il limite destreo si ha invece:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(a^2 \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} + a\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{a^2}{2} + a,$$

se $a \neq 0$, mentre tale limite vale 0 se $a = 0$. Quindi la formula trovata sopra vale per ogni a. Affinchè f sia continua in 0 deve valere

$$\frac{a^2}{2} + a = 3a - \frac{3}{2}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 - 4a + 3 = 0,$$

ovvero se e solo se $a = 1$ oppure $a = 3$.

Tema B

1a) È del tipo $[-\infty - \infty]$ e dunque il limite vale $-\infty$.

1b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2)-(x^2+3x+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+1/x}{\sqrt{1+2/x^2}+\sqrt{1+3/x+1/x^2}}=\left[\frac{-3}{2}\right]=-\frac{3}{2}$$

1c) È del tipo $\big[\{\text{funzione limitata}\}\cdot 0\big]$ e quindi il limite vale 0.

1d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+4}}=\left[\frac{-7}{+\infty}\right]=0.$$

1e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-4}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{3-\frac{4}{x}}\right)\right)=\left[+\infty\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})\right]=-\infty.$$

1f)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x-8}{1-3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2/x^2-8/x^3}{-3+1/x^3}=-1.$$

1g)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\sqrt{2+e^{-3x}}-\sqrt{2-e^{-3x}}\right)}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x+2}\log\left(\frac{2e^{-3x}}{\sqrt{2+e^{-3x}}+\sqrt{2-e^{-3x}}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{-3x})+\log 2-\log\left(\sqrt{2+e^{-3x}}+\sqrt{2-e^{-3x}}\right)}{3x+2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{3x+2}+\frac{\log 2-\log\left(\sqrt{2+e^{-3x}}+\sqrt{2-e^{-3x}}\right)}{3x+2}\right)=[-1+0]=-1.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-2}{4+3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{2-7/x-2/x^2}{3+4/x}\right)=\left[+\infty\cdot\frac{2}{3}\right]=+\infty.$$

1i) Non esiste perchè i limiti sinistro e destro non coincidono. La funzione può essere scritta come $f(x)=\frac{2-\cos x}{2+x}\cdot\frac{1}{2-x}$ e dunque risulta positiva in un intorno sinistro di 2 e negativa in un intorno destro. Essendo il limite della forma $[\frac{l}{0}]$ si conclude allora che

$$\lim_{x\to2^-}\frac{2-\cos x}{4-x^2}=+\infty\qquad\lim_{x\to2^+}\frac{2-\cos x}{4-x^2}=-\infty.$$

1j)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=[1\cdot 1]=1.$$

1k)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right]=\frac{1}{6}.$$

1l)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7-x}{2-x^2+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+7/x^2-1/x}{1+2/x^3-1/x}\right)=[0\cdot 1]=0.$$

1m)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3^x}{2^x-3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{1+x^2/3^x}{1-3x/2^x}\right)=[+\infty\cdot 1]=+\infty.$$

1n)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\tan x-2\sin\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\tan x}{x}-2\frac{\sin\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}}=\left[\frac{1-2\cdot 1}{1/2}\right]=-2.$$

1o)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2-3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-3x)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

1p)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x+3x)x}{1-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x+3x)}{-2+1/x}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty.$$

2) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ e per ogni $x\neq 0$ la funzione coincide localmente con una funzione continua ed è dunque continua. Studiamo la continuità in $x=0$ al variare di a. A tal fine devono esistere i limiti destro e sinistro di f in 0 e devono coincidere col valore della funzione in 0. Essendo la funzione continua da sinistra risulta subito che

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\frac{5a}{2}-1=f(0).$$

Per quanto riguarda il limite destro si ha invece:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(a^2\left(\frac{\sin(ax)}{(ax)}\right)^2+a^2\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\right)=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3}{2}a^2,$$

se $a\neq 0$, mentre tale limite vale 0 se $a=0$. Quindi la formula trovata sopra vale per ogni a. Affinchè f sia continua in 0 deve valere

$$\frac{3}{2}a^2=\frac{5}{2}a-1,\qquad\iff\qquad 3a^2-5a+2=0,$$

ovvero se e solo se $a=1$ oppure $a=2/3$.

Tema C

1a) È del tipo $[-\infty - \infty]$ e quindi il limite vale $-\infty$.

1b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+7}{x^3+x-5} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{2+7/x^2}{1+1/x-5/x^2}\right) = [0 \cdot 2] = 0.$$

1c) È del tipo $\big[0 \cdot \{\text{funzione limitata}\}\big]$ e quindi il limite vale 0.

1d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\sqrt{1+e^{-2x}} - \sqrt{1-e^{-2x}}\right)}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x-5} \log\left(\frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}} + \sqrt{1-e^{-2x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{-2x}) + \log 2 - \log\left(\sqrt{1+e^{-2x}} + \sqrt{1-e^{-2x}}\right)}{3x-5}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-2x}{3x-5} + \frac{\log 2 - \log\left(\sqrt{1+e^{-2x}} + \sqrt{1-e^{-2x}}\right)}{3x-5}\right) = \left[-\frac{2}{3} + 0\right] = -\frac{2}{3}.$$

1e)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 5x^3 + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - 1/x - 3/x^3}{5 + 1/x + 4/x^3} = \frac{2}{5}.$$

1f)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x+2) - (x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2+x-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+3/x}{\sqrt{1+2/x+2/x^2} + \sqrt{1+1/x-1/x^2}} = \frac{1}{2}.$$

1g)

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(3\sin x) - 1}{5x^2} = \lim_{x\to0} \left(-\frac{9}{5} \cdot \frac{1-\cos(3\sin x)}{(3\sin x)^2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = \left[-\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right] = -\frac{9}{10}.$$

1h)

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^3+5x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2(x+5)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

1i)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-5}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-5}} = \left[\frac{7}{+\infty}\right] = 0.$$

1j) Non esiste perchè i limiti sinistro e destro non coincidono. La funzione può essere scritta come $f(x) = \frac{e^x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$ e dunque risulta positiva in un intorno destro di 1 e negativa in un intorno sinistro. Essendo il limite della forma $[\frac{l}{0}]$ si conclude allora che

$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^x-1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{e^x-1}{x^2-1} = +\infty.$$

1k)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4^x + 3\cos x + 2)x}{3x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(4^x + 3\cos x + 2)}{3 - 1/x} = \left[\frac{+\infty}{3}\right] = +\infty.$$

1l) Sfruttando la relazione $\cot x = 1/\tan x$ si ottiene

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x} = -\lim_{x\to\pi/4} \tan x = -1.$$

1m)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2-3}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)\right) = \left[+\infty \cdot (1-\sqrt{2})\right] = -\infty.$$

1n)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + 2^x}{4^x + 3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1 + (2/3)^x}{1 + (3/4)^x}\right) = [0 \cdot 1] = 0.$$

1o)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3 + 7x - 4}{x^2 + 5} = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \frac{-2 + 7/x^2 - 4/x^3}{1 + 5/x^2}\right) = \big[+\infty \cdot (-2)\big] = -\infty.$$

1p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \cos\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x}}{2x\tan\sqrt[3]{x^2} + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x^2})^2}}{2\frac{\tan\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} + 3x^{1/3}} = \left[\frac{1/2}{2\cdot 1 + 0}\right] = \frac{1}{4}.$$

2) Fissato $a \in \mathbb{R}$ la funzione è definita per tutti gli $x > 0$ per cui esiste $\tan x$ ovvero per $x \in \mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0\}$. Se $x \in \mathcal{D}$ e $x \neq 0$ la funzione coincide localmente con una funzione continua ed è dunque continua. Rimane da studiare la continuità in $x = 0$ al variare di a. A tal fine devono esistere i limiti destro e sinistro di f in 0 e devono coincidere col valore della funzione in 0. Essendo la funzione continua da sinistra risulta subito che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3a - \frac{1}{2} = f(0).$$

Per quanto riguarda il limite destro si ha invece:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(a^2 \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} + 2 \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{a^2}{2} + 2,$$

se $a \neq 0$, mentre tale limite vale 2 se $a = 0$. Quindi la formula trovata sopra vale per ogni a. Affinchè f sia continua in 0 deve valere

$$\frac{a^2}{2} + 2 = 3a - \frac{1}{2}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 - 6a + 5 = 0,$$

ovvero se e solo se $a = 1$ oppure $a = 5$.

Tema D

1a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\tan x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3\tan x)}{3\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=\left[\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1\right]=\frac{3}{2}.$$

1b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2-x+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x-1)-(x^2-x+5)}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2-x+5}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-6/x}{\sqrt{1+4/x-1/x^2}+\sqrt{1-1/x+5/x^2}}=\frac{5}{2}.$$

1c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^3+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2(5x+7)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

1d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+7}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}\right)\right)=\left[+\infty\cdot(\sqrt{3}-1)\right]=+\infty.$$

1e) È del tipo $[+\infty+\infty]$ e quindi il limite vale $+\infty$.

1f)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+7}{2x^3+x^2-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+7/x^3}{2+1/x-5/x^3}=-\frac{1}{2}.$$

1g)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+7x+2}{2^x+1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^x\cdot\frac{1+7x/e^x+2/e^x}{1+1/2^x+x^2/2^x}\right)=[+\infty\cdot 1]=+\infty.$$

1h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+5}}=\left[\frac{2}{+\infty}\right]=0.$$

1i) È del tipo $\left[\{\text{funzione limitata}\}\cdot 0\right]$ e quindi il limite vale 0.

1j) Non esiste perchè i limiti sinistro e destro non coincidono. La funzione infatti risulta positiva in un inorno destro di 2 e negativa in un intorno sinistro. Essendo il limite della forma $[\frac{l}{0}]$ si conclude allora che

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{(x-2)^3}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-1}{(x-2)^3}+\infty.$$

1k)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(2\sqrt{x})+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{\sin x}+7\sqrt[4]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\tan(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}2\sqrt[4]{x}+2x^{1/12}}{3\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\sqrt[4]{x}+7}=\left[\frac{1\cdot 2\cdot 0+0}{3\cdot 0+7}\right]=0.$$

1l)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\sqrt{1+e^{-x}}-\sqrt{1-e^{-x}}\right)}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1}\log\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}}+\sqrt{1-e^{-x}}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{-x})+\log 2-\log\left(\sqrt{1+e^{-x}}+\sqrt{1-e^{-x}}\right)}{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{2x+1}+\frac{\log 2-\log\left(\sqrt{1+e^{-x}}+\sqrt{1-e^{-x}}\right)}{2x+1}\right)=\left[-\frac{1}{2}+0\right]=-\frac{1}{2}.$$

1m)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2+7x}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{-1+7/x+1/x^2}{1+3/x}\right)=\big[+\infty\cdot(-1)\big]=-\infty.$$

1n)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^x+x^2)x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^x+x^2)}{-1+1/x}=\left[\frac{+\infty}{-1}\right]=-\infty.$$

1o)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{1+x^3-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+3/x}{1-1/x+1/x^3}\right)=[0\cdot 1]=0.$$

1p) Utilizzando le relazioni $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ e $(\cos^2 x-1)=-\sin^2 x$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-2\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=\big[-2\cdot 1\cdot 1\big]=-2.$$

2) Fissato $a\in\mathbb{R}$ la funzione è definita per tutti gli $x>0$ per cui esiste $\tan(ax)$ ovvero per $x\in\mathcal{D}_a:=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi/(2a)+k\pi/a,\ k\in\mathbb{N}_0\right\}$. Se $x\in\mathcal{D}_a$ e $x\neq 0$ la funzione coincide localmente con una funzione continua ed è dunque continua. Rimane da studiare la continuità in $x=0$ al variare di a. A tal fine devono esistere i limiti destro e sinistro di f in 0 e devono coincidere col valore della funzione in 0. Essendo la funzione continua da sinistra risulta subito che

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=3a-1=f(0).$$

Per quanto riguarda il limite destro si ha invece:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(a^2\left(\frac{\tan(ax)}{ax}\right)^2+\frac{\sin x}{x}\right)=a^2+1,$$

se $a\neq 0$, mentre tale limite vale 1 se $a=0$. Quindi la formula trovata sopra vale per ogni a. Affinchè f sia continua in 0 deve valere

$$a^2+1=3a-1,\qquad\Longleftrightarrow\qquad a^2-3a+2=0,$$

ovvero se e solo se $a=1$ oppure $a=2$.