Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Compitino del 3 aprile 1998

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Si intende 30 come punteggio pieno.

1. Data la funzione

$$f(x) := x^{x/(x^2-1)},$$

a. determinare il dominio naturale, $D(f)$, di f (non considerare gli $x \leq 0$);

b. determinare l'insieme dei punti di accumulazione, la chiusura, la parte interna e la frontiera di $D(f)$;

c. studiare la continuità, la prolungabilità, e l'eventuale comportamento asintotico all'infinito.

2. Data la successione definita per induzione da

$$a_0 := \sqrt{13}, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n^2 - 3}{2} \quad \text{per } n \geq 0,$$

a. dimostrare che è limitata inferiormente;

b. dimostrare che è monotona;

c. studiarne il comportamento al limite per $n \to +\infty$;

d. dimostrare che tutti i termini della successione escluso a_0 sono numeri interi dispari. (Se a_n è dispari allora si scrive come $a_n = 2m+1$ per un qualche $m \in \mathbb{Z}$; ma allora $a_{n+1} = \ldots$).

3. Calcolare il seguente limite al variare del parametro $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1 - \operatorname{sen}(ax)}{(1-\cos x)a^{x^2}}.$$

4. Provare che la seguente successione non ha limite:

$$b_n = n^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+n\pi)}.$$

Punti: 2+3+5, 3+3+2+4, 8, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

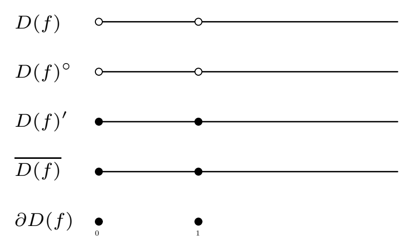
Analisi Matematica I

Compitino del 3 aprile 1998

Svolgimento

1. a. Visto che quando la base x è > 0 la potenza può avere qualsiasi esponente reale, l'unica operazione problematica per calcolare $f(x) := x^{x/(x^2-1)}$ è la divisione per $x^2 - 1$, che si può fare solo quando $x^2 - 1 \neq 0$, cioè quando $x \notin \{-1, 1\}$. Per una potenza a esponente reale qualsiasi, come la nostra, non consideriamo buone basi i numeri $x \leq 0$. Quindi possiamo prendere come dominio naturale di f l'insieme $D(f) =]0,1[\cup]1,+\infty[$. C'è un pizzico di arbitrarietà nell'escludere gli $x \leq 0$, in quanto ci sono degli $x < 0$ per i quali l'esponente $x/(x^2 - 1)$ è intero (quali?), e per i quali quindi la $f(x)$ sarebbe definita, ma non ce ne occupiamo.

b. L'insieme $D(f)$ è l'unione dei due intervalli aperti $]0,1[$ e $]1,+\infty[$, e quindi è aperto e la sua parte interna $D(f)^\circ$ è $D(f)$ stesso. Essendo aperto non ha punti isolati e la sua chiusura $\overline{D(f)}$ coincide con l'insieme $D(f)'$ dei punti di accumulazione. In generale la chiusura di un intervallo è l'intervallo chiuso con gli stessi estremi, e $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Applicando tali regole a $D(f)$ risulta $\overline{D(f)} = D(f)' = [0,1]\cup[1,+\infty[= [0,+\infty[$. La frontiera di $D(f)$ è la chiusura meno la parte interna, cioè $[0,+\infty[\setminus D(f)^\circ = [0,+\infty[\setminus D(f) = \{0,1\}$.



c. Cominciamo riscrivendo la potenza in base e:

$$x^{x/(x^2-1)} = \left(e^{\ln x}\right)^{x/(x^2-1)} = \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\ln x\right) = \exp\frac{x\ln x}{x^2-1}\,.$$

La f risulta quindi la composizione della funzione esponenziale exp, che è continua ovunque, con la funzione $x \mapsto \frac{x}{x^2-1} \cdot \ln x$ che è continua dove è definita, perché tali sono i fattori $x \mapsto x/(x^2-1)$ e $\ln x$. Pertanto anche la f è continua su $D(f)$.

La prolungabilità si studia nei punti di frontiera, cioè in 0 e in 1. Per $x \to 0^+$ il denominatore $x^2 - 1$ tende a -1, mentre il numeratore $x \ln x$ è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$ che se non è già nota si può decidere col cambio di variabile $y = -\ln x$:

$$x\ln x = e^{-y}y = \frac{y}{e^y} \qquad \text{e} \qquad y = -\ln x \to +\infty \quad \text{per } x \to 0^+\,.$$

È noto che $y/e^y \to 0$ per $y \to +\infty$ (l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto alle potenze). Tornando a noi, per $x \to 0^+$ l'argomento dell'esponenziale tende a $0/(-1) = 0$, per cui

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x/(x^2-1)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\frac{x\ln x}{x^2-1} = \exp\frac{0}{-1} = 1\,.$$

La f è prolungabile con continuità in 0 con valore 1.

Veniamo al limite per $x \to 1$. Scrivendo

$$x^{x/(x^2-1)} = \exp\frac{x\ln x}{(x-1)(x+1)}$$

può venire in mente la parentela col limite fondamentale $\frac{\ln(1+z)}{z} \to 1$ per $z \to 0$. In effetti, se poniamo $x = 1 + z$ abbiamo che $z \to 0$ per $z \to 1$ e che

$$x^{x/(x^2-1)} = \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\ln x\right) = \exp\frac{(1+z)\ln(1+z)}{z(z+2)} = \exp\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\cdot\frac{1+z}{z+2}\right).$$

Dunque

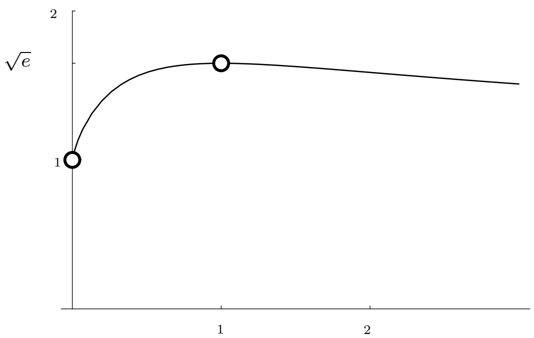
$$\lim_{x\to 1} x^{x/(x^2-1)} = \lim_{z\to 0} \exp\Bigl(\frac{\ln(1+z)}{z}\cdot\frac{1+z}{z+2}\Bigr) = \exp\Bigl(1\cdot\frac{1+0}{0+2}\Bigr) = \exp\frac{1}{2} = \sqrt{e}\,.$$

La f risulta prolungabile per continuità anche in $x=1$, con valore $\sqrt{e}$.
Infine studiamo il comportamento di $f(x)$ per $x\to+\infty$. Possiamo scrivere, dividendo numeratore e denominatore per x^2,

$$f(x) = \exp\frac{x\ln x}{x^2-1} = \exp\frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\,.$$

Si sa che $\frac{\ln x}{x}\to 0$ per $x\to+\infty$ (il logaritmo è un infinito di ordine inferiore rispetto alle potenze). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\exp\frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = $$
$$= \exp\frac{0}{1-0} = \exp 0 = 1\,.$$



La $f(x)$ tende asintoticamente al valore 1 per $x\to+\infty$. Qui accanto c'è un grafico di f prodotto per punti, con un algoritmo che a volte dà risultati fuorvianti. Guardando la figura una delle congetture che possono venire in mente è che $1<f(x)<\sqrt{e}$ per tutti gli x . La cosa si può in effetti dimostrare senza troppa fatica. Chi vuole cimentarsi può dare per scontato il fatto che $\ln(1+z)\le z$ per ogni $z>-1$.

2. a. Per ogni $n\ge 0$ il termine a_n^2 è $\ge$ in quanto è un quadrato, per cui

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2-3}{2} \ge \frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{per ogni } n\ge 0\,.$$

Anche $a_0=\sqrt{13}\sim 3{,}6055$ è ovviamente $\ge -3/2$. Possiamo concludere che la successione a_n è limitata inferiormente da $-3/2$, anche se non ci aspettiamo che questo sia l'estremo inferiore.

n	a_n
0	$\sqrt{13}$
1	5
2	11
3	59
4	1 739
5	1 512 059
6	1 143 161 209 739

b. Uno sguardo alla tabella dei primi 7 valori di a_n la fa ritenere robustamente crescente. Cerchiamo di dimostrarlo. Sotto che condizioni a_{n+1} è maggiore di a_n?

$$\begin{aligned} a_{n+1}=\frac{a_n^2-3}{2}>a_n \quad&\iff\quad a_n^2-3>2a_n \quad\iff\quad a_n^2-2a_n-3>0 \quad\iff\\ &\iff\quad (a_n-1)^2-4>0 \quad\iff\quad (a_n-1)^2>2^2 \quad\iff\\ &\iff\quad \Bigl(a_n-1>2 \text{ oppure } a_n-1<-2\Bigr) \quad\iff\\ &\iff\quad \Bigl(a_n>3 \text{ oppure } a_n<-1\Bigr)\,.\end{aligned}$$

Definiamo la seguente proposizione:

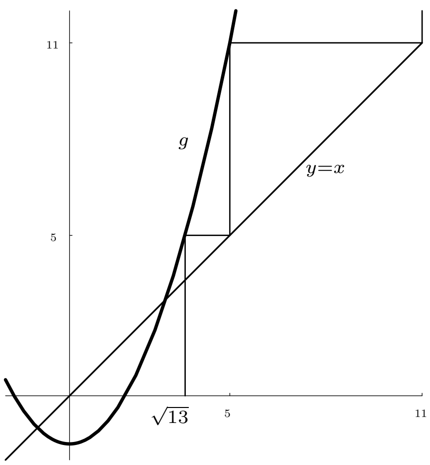
$$P(n) := \text{“}3<a_n<a_{n+1}\text{”}.$$

Questa $P(n)$ è vera per $n=0$, in quanto $3=\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{25}=5$. Inoltre se è vera per un qualche $n\ge 0$ allora risulta in particolare che $a_{n+1}>3$, e quindi, per la formula trovata sopra avremo che a_{n+2} è maggiore di a_{n+1}, il quale a sua volta è >3 per ipotesi induttiva. Insomma, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. Per il principio di induzione la $P(n)$ è vera per ogni $n\ge 0$, e la successione è davvero strettamente crescente.

Una dimostrazione alternativa sarebbe di provare per induzione che $Q(n) :=$ "$a_{n+1} > a_n > 0$" è vera $\forall n \geq 0$. Per $n = 0$ è ovvia. Se vale $Q(n)$ per un certo n, in particolare possiamo elevare al quadrato ambo i membri di $a_{n+1} > a_n$ perché entrambi positivi, e quindi successivamente

$$a_{n+1} > a_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1}^2 > a_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1}^2 - 3 > a_n^2 - 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}^2 - 3}{2} > \frac{a_n^2 - 3}{2} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad a_{n+2} > a_{n+1}\,.$$

La parte "> 0" di $Q(n+1)$ viene per la transitività: $a_{n+2} > a_{n+1}$ insieme all'ipotesi induttiva $a_{n+1} > a_n > 0$ dà $a_{n+2} > a_{n+1} > 0$, cioè $Q(n+1)$.



Il punto **a** diventa superfluo se si prova che $n \mapsto a_n$ è crescente, perché in tal caso si ha automaticamente $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_0$.
La successione è nella forma iterativa $a_{n+1} = g(a_n)$ con $g(x) := (x^2 - 3)/2$, e disegnando il grafico di g con quello della bisettrice $y = x$ si può visualizzare l'andamento della successione, almeno per i primissimi termini, come qui accanto.

c. Sappiamo che una successione crescente ha sempre limite, e il limite è l'estremo superiore della successione. Possono succedere due cose: o tale estremo superiore è $+\infty$ o è un numero ℓ finito. Dai conti che abbiamo fatto sulla nostra particolare a_n siamo portati a propendere per la prima alternativa. Per dimostrarlo, supponiamo per assurdo che valga la seconda: $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Allora

$$\ell \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 3}{2} \to \frac{\ell^2 - 3}{2}\,.$$

Per l'unicità del limite deve valere $\ell = (\ell^2 - 3)/2$, cioè $2\ell = \ell^2 - 3$, che equivale a $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, che è possibile solo quando $\ell \in \{-1, 3\}$. D'altra parte, per la crescenza di a_n abbiamo che $a_n \geq a_0 = \sqrt{13} > 3$, per cui deve risultare $\ell \geq a_0 = \sqrt{13} > 3$, che è incompatibile con $\ell \in \{-1, 3\}$. Siamo costretti a concludere che a_n ha per limite $+\infty$, come ci aspettavamo.

d. Dimostriamo per induzione che la proposizione

$$R(n) := \text{“}a_n \text{ è un intero dispari”}$$

è vera per $n \geq 1$. Per $n = 1$ è ovviamente vera, perché $a_1 = 5$. Supponiamo che per un certo $n \geq 1$ sia vera, cioè che esista un intero m tale che $a_n = 2m + 1$. Allora

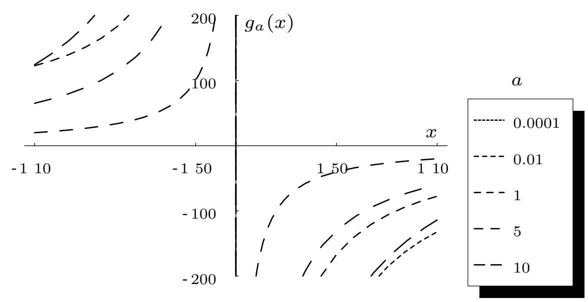
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 3}{2} = \frac{(2m+1)^2 - 3}{2} = \frac{4m^2 + 4m + 1 - 3}{2} = 2m^2 + 2m - 1 = 2(m^2 + m) - 1\,.$$

Poiché $m^2 + m$ è ancora un intero, $2(m^2 + m)$ è un intero pari, e $a_{n+1} = 2(m^2 + m) - 1$ è un intero dispari. Risulta quindi che anche $R(n + 1)$ è vera. Questo conclude la dimostrazione.
Un ragionamento alternativo per dimostrare che $a_n \to +\infty$ è di notare che, essendo a valori interi (eccetto a_0), ed essendo strettamente crescente, deve crescere di almeno 1 ad ogni passo. Quindi per induzione $a_n \geq a_1 + n - 1 = 4 + n$ per ogni $n \geq 1$ e il risultato segue per confronto.

3. Cerchiamo di far saltare fuori espressioni simili a quelle di limiti fondamentali, dividendo numeratore e denominatore per x:

$$g_a(x) := \frac{a^x - 1 - \operatorname{sen}(ax)}{(1 - \cos x)a^{x^2}} = \frac{e^{x \ln a} - 1 - \operatorname{sen}(ax)}{(1 - \cos x)a^{x^2}} = \frac{(\ln a)\frac{e^{x\ln a} - 1}{x \ln a} - a \cdot \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\frac{1 - \cos x}{x} a^{x^2}}\,.$$

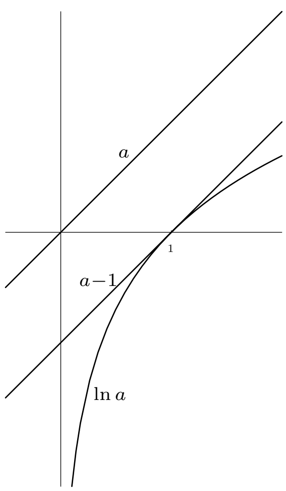
Calcoliamo separatamente i limiti dei vari termini:



$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=1\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0\,,$$
$$\lim_{x\to 0}a^{x^2}=a^{0^2}=a^0=1\,.$$

Possiamo ora calcolare separatamente i limiti di numeratore e denominatore nella formula sopra:

$$\lim_{x\to 0}\Big((\ln a)\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}-a\cdot\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\Big)=(\ln a)\cdot 1-a\cdot 1=\ln a-a\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot a^{x^2}=0\cdot 1=0\,.$$

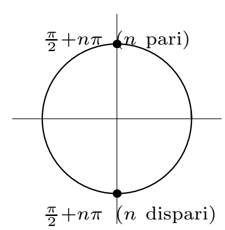


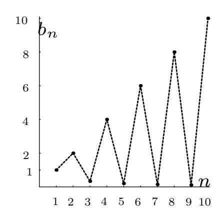
Non può succedere che il limite del numeratore sia zero, perché vale la disuguaglianza $\ln a\le(a-1)<a$ per ogni $a>0$. Anzi, il limite del numeratore è sempre <0. Il fattore $(1-\cos x)a^{x^2}$ è ≥ 0 per ogni $x\in\mathbb{R}$ in quanto $\cos x\le 1$ sempre. Pertanto il denominatore ha lo stesso segno del restante fattore x, e abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}g_a(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln a)\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}-a\cdot\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\frac{1-\cos x}{x}\cdot a^{x^2}}=\frac{\overbrace{\ln a-a}^{<0}}{0^+}=-\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+}g_a(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\ln a)\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}-a\cdot\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\frac{1-\cos x}{x}\cdot a^{x^2}}=\frac{\overbrace{\ln a-a}^{<0}}{0^-}=+\infty\,.$$

Possiamo concludere che per nessun $a>0$ il limite proposto esiste, sebbene esistano i limiti da destra e da sinistra e siano rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. Possiamo anche dire che il limite esiste ma è *"∞ senza segno"*.

4. L'arco $\frac{\pi}{2}+n\pi$ cade nel punto $(0,1)$ quando n è pari, e nel punto $(0,-1)$ per n dispari. Pertanto $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+n\pi)=(-1)^n$ e la successione si riscrive come





$$b_n=n^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+n\pi)}=n^{(-1)^n}=\begin{cases}n^1=n & \text{per } n \text{ pari},\\ n^{-1}=1/n & \text{per } n \text{ dispari}.\end{cases}$$

La sottosuccessione di $n\mapsto b_n$ formata dagli indici dispari, cioè $n\mapsto b_{2n}=2n$, tende a $+\infty$, mentre quella degli indici pari, $n\mapsto b_{2n+1}=1/(2n+1)$, tende a 0. Quando due sottosuccessioni di una data successione hanno limiti diversi necessariamente la successione non ha limite.