Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Calcolare il seguente limite, se esiste:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}^2(n!)+e^{n+2}+\sqrt{n}}{3e^n+n^2(1-\cos(1/n))}}\,.$$

(A cosa tende il radicando?).

2. Dimostrare che qualunque sia il valore del parametro reale k il polinomio

$$f(x) := x^3 - 3x + k$$

non può avere più di una radice nell'intervallo $[0,1]$.
(Se ci fossero due radici si potrebbe applicare Rolle...).

3. Calcolare il seguente integrale, se ha senso:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

(Prendere come nuova variabile l'esponente, e poi per parti).

Punti: 10, 10, 10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Svolgimento

1. Cominciamo col notare che la successione è ben definita: dentro il radicale il numeratore è somma di quantità positive, e il denominatore è strettamente positivo ($3e^n > 0$ sempre e $1-\cos x \geq 0$ per ogni x), per cui la frazione è positiva e la radice si può estrarre.

n	a_n
1	2,52986 ...
2	1,58389 ...
3	1,35226 ...
4	1,25399 ...
5	1,19784 ...
6	1,16220 ...
7	1,13747 ...
8	1,11928 ...
9	1,10535 ...
10	1,09433 ...

Per trovare il limite isoliamo per cominciare il radicando:

$$b_n := \frac{\operatorname{sen}^2(n!) + e^{n+2} + \sqrt{n}}{3e^n + n^2(1-\cos(1/n))}\,.$$

Con un minimo di esperienza con gli ordini di infinito, si vede che al numeratore il termine prevalente per n grande è e^{n+2}, mentre al denominatore è $3e^n$. Più in dettaglio si possono raccogliere i termini candidati principali:

$$b_n = \frac{e^{n+2}}{3e^n} \cdot \frac{\frac{\operatorname{sen}^2(n!)}{e^{n+2}} + 1 + \frac{\sqrt{n}}{e^{n+2}}}{1 + \frac{n^2(1-\cos(1/n))}{3e^n}}\,.$$

Esaminiamo i vari pezzi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2(n!)}^{0\le\cdot\le1}}{\underbrace{e^{n+2}}_{\to+\infty}} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{n+2}} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1/2}/2}{e^{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{n}e^{n+2}}_{\to+\infty}} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3e^n} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3e^n} \overset{\substack{\infty/\infty\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{3e^n}_{\to+\infty}} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1-\cos(1/n))}{3e^n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{n^2}{3e^n}\right)}_{\to0} \cdot \underbrace{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}_{\to0} = 0\,.$$

In definitiva possiamo scrivere

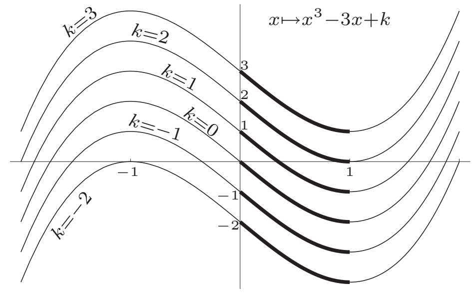
$$b_n = \frac{e^{n+2}}{3e^n} \cdot c_n = \frac{e^2}{3} \cdot c_n\,, \qquad \text{dove } c_n := \frac{\frac{\operatorname{sen}^2(n!)}{e^{n+2}} + 1 + \frac{\sqrt{n}}{e^{n+2}}}{1 + \frac{n^2(1-\cos(1/n))}{3e^n}} \longrightarrow \frac{0+1+0}{1+0} = 1\,.$$

Estraendo la radice n-esima e scrivendo $\sqrt[n]{x} = \exp((\ln x)/n)$, in modo da portare il problema all'esponente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^2}{3} \cdot c_n} = \lim_{n\to+\infty} \exp \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{e^2}{3} \cdot c_n\right)}^{\to\ln(e^2/3)}}{n} = \exp 0 = 1\,.$$

(In generale se $b_n \to \ell \in \,]0,+\infty[$ allora $\sqrt[n]{b_n} \to 1$).

2. Supponiamo che ci siano due soluzioni distinte c_1, c_2 nell'intervallo $[0,1]$, per esempio nell'ordine $0 \le c_1 < c_2 \le 1$. Poiché $f(c_1) = f(c_2) = 0$ e f è derivabile (è un polinomio), possiamo applicare il teorema di Rolle: esiste $\xi \in \,]c_1, c_2[$ tale che $f'(\xi) = 0$. Ora la derivata f' si calcola esplicitamente:



$$f'(x) = 3x^2 - 3\,.$$

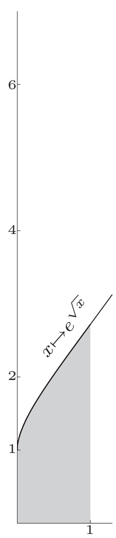
Ora $0 = f'(\xi) = 3\xi^2 - 3$ equivale a $\xi^2 = 1$, cioè $\xi = \pm 1$, che contraddice il fatto che ξ fosse *strettamente* compresa fra 0 e 1. Dobbiamo concludere che non ci possono essere due soluzioni distinte fra 0 e 1.

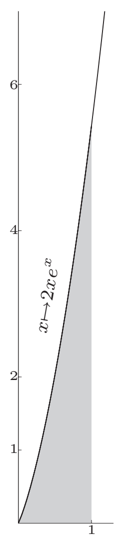
Un altro metodo di dimostrazione è di studiare la crescenza della f, usando il segno la derivata:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \begin{cases} = 0 & \text{per } x = \pm 1, \\ < 0 & \text{per } -1 < x < 1, \\ > 0 & \text{per } x < -1 \text{ e per } x > 1. \end{cases}$$

Dunque sull'intervallo $[0,1]$ la f è *strettamente decrescente*, e non può prendere lo stesso valore più di una volta.

3. La funzione $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ è definita per $x \ge 0$, ed è la composizione di funzioni che sono *continue* sul loro dominio. Quindi ha senso l'integrale su $[0,1]$. Invece che ragionare sulla continuità si poteva anche invocare la monotonia: la funzione $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ è composizione di due funzioni strettamente crescenti ($x \mapsto \sqrt{x}$ e $y \mapsto e^y$), e quindi è strettamente *crescente*.





Per calcolare il valore dell'integrale prendiamo come nuova variabile $y = \sqrt{x}$. Sia ha $y^2 = x$, $2y\,dy = dx$, per cui

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{1}} e^y \cdot 2y\,dy = 2\int_0^1 ye^y\,dy\,.$$

Ora calcoliamo per parti una primitiva di $y \mapsto ye^y$:

$$\int ye^y\,dy = \int y\,de^y = ye^y - \int e^y\,dy = ye^y - e^y = (y-1)e^y\,.$$

Quindi

$$2\int_0^1 ye^y\,dy = 2\big[(y-1)e^y\big]_0^1 = 2\big((1-1)e^1 - (0-1)e^0\big) = 2\,.$$