Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Dimostrare che la successione ricorsiva

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := 2 + \frac{1}{2 + a_n} \quad \text{per } n \geq 1.$$

è ben definita, compresa fra 1 e 7/3, e non monotona. Ha limite, e se sì, quale?
(Sia $f(x) := 2 + \frac{1}{2+x}$. Se il limite ℓ esiste, allora necessariamente verifica l'equazione… Mostrare poi che $|a_{n+1} - \ell| = |f(a_n) - f(\ell)| \leq |a_n - \ell|/2$).

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$ e che la derivata f' sia debolmente crescente. Dimostrare che allora anche la funzione $g(x) := f(x)/x$ è debolmente crescente per $x > 0$.
(Derivando g far vedere che la crescenza di g equivale alla disuguaglianza $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq f'(x)$ per ogni x, e poi usare il teorema di Lagrange…).

3. Calcolare il seguente integrale, se ha senso:

$$\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx\,.$$

(Integrare per parti due volte).

Punti: 15, 10, 10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Svolgimento

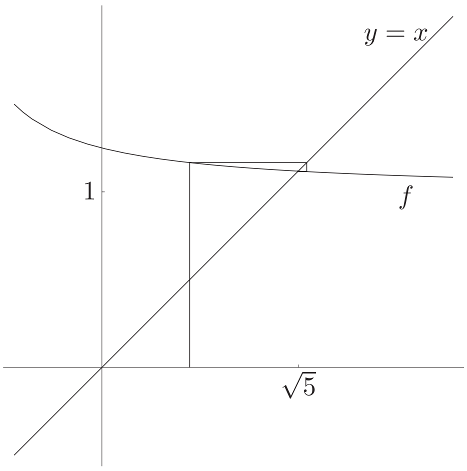
1. La successione è del tipo iterativo $a_{n+1} := f(a_n)$, con

$$f(x) := 2 + \frac{1}{2+x}\,.$$

n	a_n
1	1
2	2.333333333 ...
3	2.230769231 ...
4	2.236363636 ...
5	2.236051502 ...
6	2.236068896 ...
7	2.236067926 ...
8	2.236067980 ...
9	2.236067977 ...
10	2.236067978 ...

Se si sa disegnare il grafico di f si può seguire l'andamento della successione dalla figura. La funzione f non è definita per $x = -2$. Potrebbe capitare che un qualche termine della successione sia proprio uguale a -2? La risposta è no, in quanto $a_1 = 1 > 0$ e ogniqualvolta a_n è > 0 anche a_{n+1} è > 0, essendo somma di 2 col un numero positivo $1/(2 + a_n)$. Dunque la successione è ben definita. Dimostriamo per induzione la proprietà più precisa che $1 \le a_n \le 7/3$: per $n = 1$ è vera banalmente, e supponendo che sia vera per un qualche n dimostriamola per $n + 1$:

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{\underbrace{2+a_n}_{>0}} \ge 2\,, \qquad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{\underbrace{2+a_n}_{>2+1}} \le 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\,.$$



La successione non è debolmente decrescente in quanto $a_2 > a_1$:

$$a_2 = 2 + \frac{1}{2+1} = 7/3 > a_1 = 1\,,$$

e non è debolmente crescente in quanto $a_3 < a_2$:

$$a_3 = 2 + \frac{1}{2+\frac{7}{3}} = 2 + \frac{3}{13} = \frac{29}{13} = \frac{87}{39} < a_2 = \frac{7}{3} = \frac{91}{39}\,.$$

I valori decimali approssimati dei primi dieci termini della successione lasciano pensare che il limite ci sia. Facciamo una fuga in avanti e supponiamo che in effetti la successione abbia un limite ℓ. Questo ℓ è necessariamente finito in quanto la successione è limitata, anzi, passando al limite nelle disuguaglianze $1 \le a_n \le 7/3$ risulta che $1 \le \ell \le 7/3$. La funzione f è continua in tutti i punti eccetto -2; in particolare è continua in ℓ. Quindi possiamo passare al limite per $n \to +\infty$ nell'uguaglianza $a_{n+1} = f(a_n)$ per ottenere $\ell = f(\ell)$, cioè

$$\ell = 2 + \frac{1}{2+\ell} \iff (2+\ell)\ell = 2(2+\ell) + 1 \iff 2\ell + \ell^2 = 4 + 2\ell + 1 \iff \ell^2 = 5$$

(si può moltiplicare per $2 + \ell$ perché è $\ne 0$). Il valore $\ell = -\sqrt{5}$ non è accettabile in quanto il nostro ℓ è positivo. Non rimane che il valore $\ell = \sqrt{5} \sim 2,236067977$, che fortunatamente è compreso fra 1 e 7/3. Non abbiamo ancora dimostrato che il limite esiste, ma sappiamo ora che *se* esiste è necessariamente $\ell = \sqrt{5}$. Per vedere se davvero il limite esiste, confrontiamo la differenza $a_{n+1} - \sqrt{5}$ con $a_n - \sqrt{5}$, sfruttando il fatto che $\sqrt{5} = f(\sqrt{5})$:

$$a_{n+1} - \sqrt{5} = f(a_n) - f(\sqrt{5}) = \Big(2 + \frac{1}{2+a_n}\Big) - \Big(2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}}\Big) = \frac{1}{2+a_n} - \frac{1}{2+\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{2+\sqrt{5}-2-a_n}{(2+a_n)(2+\sqrt{5})} = -\frac{a_n-\sqrt{5}}{(2+a_n)(2+\sqrt{5})}\,.$$

Prendendo i valori assoluti:

$$\left|a_{n+1}-\sqrt{5}\right| = \left|-\frac{a_n-\sqrt{5}}{(2+a_n)(2+\sqrt{5})}\right| = \frac{|a_n-\sqrt{5}|}{\underbrace{(2+a_n)}_{\geq 3}\underbrace{(2+\sqrt{5})}_{\geq 3}} \leq \frac{|a_n-\sqrt{5}|}{9}\,.$$

Per $n=1$ questo dice che

$$\left|a_2-\sqrt{5}\right| \leq \frac{|1-\sqrt{5}|}{9}\,.$$

Per $n=2$ si ha

$$\left|a_3-\sqrt{5}\right| \leq \frac{|a_2-\sqrt{5}|}{9} \leq \frac{|a_1-\sqrt{5}|}{9^2}\,.$$

Per induzione si ricava la formula

$$\left|a_n-\sqrt{5}\right| \leq \frac{|1-\sqrt{5}|}{9^{n-1}} \qquad \text{per ogni } n\geq 2\,.$$

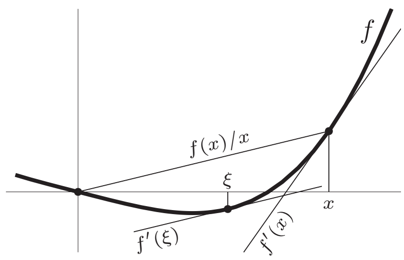
Poiché $9^{n-1}\to+\infty$ per $n\to+\infty$, per il confronto abbiamo che $|a_n-\sqrt{5}|\to 0$, cioè $a_n\to\sqrt{5}$. Si conferma quindi che il limite esiste e vale $\sqrt{5}$.

2. Se la funzione f è derivabile, lo è pure la $g(x) := f(x)/x$ per $x\neq 0$, e la derivata vale

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\,.$$

Sappiamo che una funzione derivabile su un intervallo è debolmente crescente se e solo se la sua derivata è ≥ 0 su tutto l'intervallo. Quindi chiedere che g sia debolmente crescente è lo stesso che chiedere che

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\geq 0\,, \quad \text{cioè} \quad xf'(x)-f(x)\geq 0 \qquad \forall x>0\,.$$

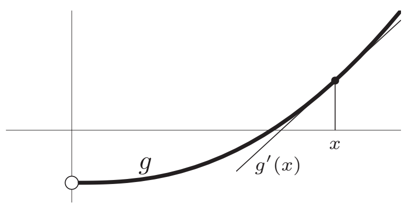


Possiamo dividere la disuguaglianza per $x>0$ e ricavare che la crescenza di g equivale a

$$f'(x)\geq\frac{f(x)}{x} \qquad \forall x>0\,.$$

Tenendo conto che $f(0)=0$ per ipotesi questo equivale ancora a

$$f'(x)\geq\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \forall x>0\,.$$



La f è derivabile ovunque per ipotesi. Applicando il teorema del valor medio di Lagrange abbiamo che

$$\text{per ogni } x>0 \text{ esiste } \xi\in\,]0,x[\text{ tale che} \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\,.$$

Per ipotesi f' è debolmente crescente, per cui da $\xi<x$ segue $f'(\xi)\leq f'(x)$. Dunque

$$\forall x>0\ \exists\xi\in\,]0,x[\text{ tale che } \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\geq f'(x)\,,$$

cioè

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq f'(x)\,,$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

3. La funzione integranda $x \mapsto \cos(\ln x)$ è definita per $x > 0$, e dove esiste è continua. Essendo $0 < 1 < e^\pi$ l'integrale ha perfettamente senso. Proviamo a trovare una primitiva della funzione integranda integrando per parti $\int fg' = fg - \int f'g$, identificando $f(x)$ con $\cos(\ln x)$ e $g(x)$ con x (la cui derivata è 1):

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) - \int x\big(-\operatorname{sen}(\ln x)\big)\frac{1}{x}\,dx = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx\,.$$

Integriamo di nuovo per parti, questa volta con $f(x) := \operatorname{sen}(\ln x)$ e $g(x) := x$:

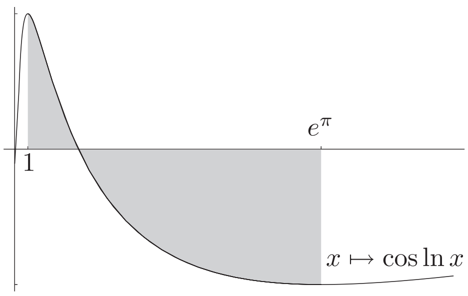
$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx\,.$$

L'ultimo addendo coincide con l'integrale che dobbiamo calcolare. Se lo portiamo a primo membro abbiamo

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)\,,$$

da cui, dividendo per 2:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\big(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\big)\,.$$



Venendo all'integrale definito:

$$\begin{aligned}\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx &= \Big[\frac{x}{2}\big(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\big)\Big]_1^{e^\pi} = \\ &= \frac{e^\pi}{2}(\cos\pi + \operatorname{sen}\pi) - \frac{1}{2}(\cos 0 + \operatorname{sen} 0) = \\ &= -\,\frac{e^\pi + 1}{2}\,.\end{aligned}$$

La figura a questa scala non lo lascia sospettare, ma il grafico di $x \mapsto \cos\ln x$ ha infinite oscillazioni dall'ordinata -1 all'ordinata 1 nelle vicinanze di $x = 0$.